The World of Twistors

ツイスターの世界

—時空・ツイスター空間・可積分系—

高崎金久 著

共立出版

前書き

ツイスター理論はペンローズ（R. Penrose）が相対論的な時空と場の新しい記述方法として提案したもので，1960 年代後半に登場して以来，数多くの成果や応用を生みだして今日に至っている．ツイスター理論のアイディアの源泉となったのがスピンの理論である．スピンは素粒子の内部自由度の一種で，SU(2) や $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ などのリー群の有限次元線形表現を用いて記述される．これらの表現空間の要素（あるいは前記のリー群の作用に対してそれと同じ変換則に従う量）はスピナーと呼ばれ，スピン自由度をもつ粒子や場の記述において基本的な役割を果たす．ペンローズはスピナーを時空幾何学自体の記述に用いることを考えて，一対のスピナーからなる 4 成分量を導入し，“ツイスター” と名づけた．特殊相対論の時空であるミンコフスキー時空の場合には，ツイスターの集合（ツイスター空間）は 3 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^3$ をなし，その中のある付加的条件を満たす 1 次元複素部分多様体（複素射影直線）が時空点と 1 対 1 に対応する．相対論的な時空の裏にはこのような複素多様体が存在し，その上の正則曲線・正則函数・コホモロジー類などの複素幾何学的構造によって時空や場が記述される，というのがツイスター理論の基本的な考え方である．

超対称場の理論や超弦理論の発展した今日では複素構造と物理の関わりは日常茶飯事の話題であるが，ペンローズがツイスター理論を提案した当時，複素構造によって物理を記述する，という視点はきわめて斬新なものだった．ただし，複素構造に対する考え方は超対称場の理論や超弦理論の場合とはかなり異なる．ペンローズが複素構造を重視するのは，量子力学が複素数による線形重ね合せを基本原理とするからである．ミンコフスキー時空のツイスター空間である $\mathbf{CP}^3$ は 4 次元複素線形空間 $\boldsymbol{C}^4$ の複素射線（すなわち 1 次元複素線形部分空間）の集合と見なせるが，この $\boldsymbol{C}^4$ はもともとスピンに関連する一種の量

子力学的状態空間である．相対論的時空幾何学と量子力学的線形重ね合せが共通の複素構造によって記述される，というこの発見がツイスター理論を推進する重要な動機となった．

ツイスター理論は（おそらくペンローズの期待に反することではあろうが）物理よりも数学において多くの成果を生みだした．その代表的なものを列挙すれば次のようになる．

1. ヤン–ミルズ方程式のインスタントン解やモノポール解などの構成・特徴づけ
2. アインシュタイン方程式のインスタントン解などの構成・特徴づけ
3. 高次元可積分系の構成ならびにそこからソリトン方程式などを導くこと
4. 表現論，積分幾何学，多変数複素函数論，代数解析学に題材を提供すること

ここに掲げたヤン–ミルズ方程式やアインシュタイン方程式の解に関する成果は特に代数幾何学の観点から関心を呼んだが，場の量子論とも関わりが深い．また，間接的ではあるが，一般相対論の正準量子化の立場からの量子重力理論（アシュテカー理論やループ量子重力理論）はツイスター理論と精神面や技術面でつながりがある．さらに，最近のウィッテン（E. Witten）の論文に始まり現在も進行中であるゲージ理論・超弦理論関係の一連の研究（ツイスター弦理論）が注目される．

本書でツイスター理論を紹介しようと考えた理由や目的はいくつかある．第一に，ツイスター理論を本格的に紹介する日本語の本が皆無であることが大きな理由として掲げられる．ペンローズは人間の心の仕組みを論じた本 *Emperor's new mind*（邦訳『皇帝の新しい心』，林一訳，みすず書房 1994 年）で賛否両論の論争を巻き起こすなど，話題の豊富な人物であるが，その是非はともかくとして，ツイスター理論は一般相対論の特異点定理や非周期的タイル張りとともにペンローズの最も重要な学問的業績と考えられる．その内容を日本語で紹介することは今なお十分に価値がある．第二に，ツイスター理論は物理的内容と数学的内容がほどよく混合した，優れた総合的教材である．このことをよく示す題材として，本書の第 1 章～第 4 章ではミンコフスキー時空における無質量自由場の積分表示を取り上げる．これはツイスター理論の中でも初期に属す

る話題であるが，自由場の方程式という物理的にも数学的も単純なものを対象にしながら，最後には層係数コホモロジーやドルボーコホモロジーの世界に到る，という興味深い内容をもつ．第三に，ツイスター理論はソリトン方程式などの可積分系の理論への道の一つでもある．本書の第5章・第6章ではゲージ場と重力場のツイスター的記述を取り上げるが，これらは高次元可積分系の例と見なすことができる．ツイスター理論の研究者の1990年代以降の大きな関心事はこのような視点から可積分系の理論を理解することだった．このツイスター理論から可積分系へのアプローチの一端を伝えることが本書の最終的にめざす目標である．

本書をまとめるにあたっては，講義の準備ノートを書くようなつもりで，厳密性や一般性をあまり追求しないように努めた．講義というものは厳密であればあるほどほどわかりにくくなる．むしろ，鍵となるアイディアを伝えて，あとは各自で勉強してもらうのがよい．同様の意味で，いたずらに一般性を追求するよりも典型的な場合に焦点を絞る方がよい．このような考え方で書き進んだので，本来ならば取り上げるべきことを省略したり，あるいは逆に重複をいとわず繰り返した項目もある．本文中で取り上げられなかったことについては各章の章末の「覚え書き」で簡単に触れるか参考文献を掲げるようにした．このためかなり長い参考文献リストを巻末に用意することになったが，これは網羅的なリストからほど遠いものであることをお断りしておきたい．

読者としては，多様体論やリー群論などの基礎を習得済みで，複素射影空間などの具体的な複素多様体に関する知識のある大学生・大学院生や研究者を想定している．本書を講義の際に参考書として提示することやセミナー用の教材として使うことも可能だろう．第1章・第2章では，数学に関しては線形代数・基礎解析・複素解析と初等的な多様体論・リー群論しか使っていないし，物理学に関しては電磁気学・量子力学・特殊相対論の入門的知識があれば十分である．第3章・第4章では複素多様体に関する基礎知識とホモロジー代数やドラームコホモロジーなどを学んだ経験が必要だろう．第5章・第6章では場の理論・一般相対論・可積分系についてある程度の予備知識が要求される．

用語について一言釈明しておく必要がある．ツイスターは英語で twistor と表記する．語尾からわかるように，ペンローズは vector, tensor, spinor に並

ぶ語（および概念）としてこの語を創り出した．問題は後者を日本語では「ベクトル」,「テンソル」,「スピノル」というように表記することが多いということにある．これらの今では古風としか言いようのない表記を「ツイスター」とともに用いると，英語では語尾が同じであるという情報が伝わらない．これは残念なのでどちらかに統一することにしたが,「ツイスター」を変えることは認めがたいので，他の言葉の方を英語風に「ベクター」,「テンサー」,「スピナー」に変えることにした．ちなみに「スカラー」も英語風に言えば「スケーラー」であるが，これはかえってわかりにくくなるので「スカラー」のままにした．これに伴って「ベクトル空間」,「ベクトル束」などの語も変更を迫られたが,「ベクター空間」,「ベクター束」と言い換えることは時期尚早に思えたので「線形空間」,「線形束」という語を使うことにした．

最後になるが，岡山理科大学の池田岳氏と京都大学の佐々木隆氏からは草稿に関して数多くの貴重なコメントをいただいた．また共立出版の小山透氏には折に触れて励ましの言葉を賜り，出版までの労を執っていただいた．この場をお借りして感謝したい．

2005 年 4 月

高崎　金久

目　次

第1章　ミンコフスキー時空と自由場の方程式

第2章　ツイスター誕生

第4章　層係数コホモロジーとペンローズ変換

第5章 ゲージ場のツイスター理論

第1章

ミンコフスキー時空と自由場の方程式

スピンは直観的には素粒子の「自転」であるが，古典力学における剛体の自転などと違ってその本質は純粋に量子力学的なものである．たとえば，全角運動量に相当する量（それが s であるような粒子あるいは場はスピン s の粒子・場という）は $0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ という半整数値に「量子化」される．スピンの理論は最初パウリ（W. Pauli）によって非相対論的形式で与えられ，その後ディラック（P.A.M. Dirac）によって相対論的形式に書き直された．相対論的スピンの記述には複素リー群 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が現れる．その有限次元線形表現に従って変換する量はスピナーと呼ばれ，スピン自由度をもつ粒子や場の取扱いにおいて基本的役割を演じる．この複素リー群は本義ローレンツ群の 2 重被覆として特殊相対論のミンコフスキー時空の対称性とも関わっている．したがって，ディラックがスピン 1/2 の場合に見出したように，場の方程式の相対論的不変性を追求すれば自然にスピン自由度が現れる．このように，スピンあるいはスピナーは相対論的時空の幾何学と密接に関連している．このことから時空幾何学の記述にもスピナーを用いるという着想が生まれる．ツイスター理論はこの着想の延長線上にある．

この章では，ツイスター理論を紹介するための準備として，ミンコフスキー時空とその上の自由場の方程式について詳しい解説を行う．最初にミンコフスキー時空の計量構造や変換群・スピン構造などについて説明する．ユークリッド時空や超双曲型時空のスピン構造についても簡単に触れる．次にスピナーの概念を導入し，その代数的側面（スピナー算法）を説明する．さらに，ディラック方程式とマクスウェル方程式を例に選んで，相対論的な場の方程式がスピナー形式の方程式に書き直せることを示す．このようにして得られるスピナー形式の無質量自由場の方程式はスピン 1/2 のワイル方程式を一般化したものになる．

1　ミンコフスキー時空

特殊相対論（special relativity）の舞台はミンコフスキー時空である．これは数学的には $(+---)$ 型の計量（正確に言えば擬計量）をもつ平坦な4次元多様体として定義される．この節ではミンコフスキー時空の計量構造・変換群・スピン構造などに関する基本的概念を説明する．特に，本義ローレンツ群の被覆群として $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ がどのような形で現れてくるか，ということに重点をおく．$(++++)$ 型の計量をもつユークリッド時空や $(++--)$ 型の計量をもつ超双曲型時空における類似の構造についても触れる．以後いわゆる自然単位系を採用し，プランク定数 $\hbar$ と光速 c はいずれも 1 とする．

1.1　ミンコフスキー計量

即物的に言えば，ミンコフスキー時空（Minkowski spacetime）とは時間座標 t と空間座標 x^1, x^2, x^3 をもつ[†1]4次元空間 $\boldsymbol{R}^4$ に $(+---)$ 型のミンコフスキー計量

$$ds^2 = (dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.1}$$

を入れたものである．実際には t を x^0 という記号で表し，4次元座標 x^0, x^1, x^2, x^3 によって

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と表すことが多い．係数行列 $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ は

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という成分をもつ．上下に同じ添字が現れるときにはその添字について総和するものと解釈する，というアインシュタインの規約（Einstein's convention）に

[†1] これはあくまで仮に選んだ一つの座標系である．相対論では時間軸も含めて特定の座標系を選ぶ絶対的基準は存在しないと考える．

従えば，さらに簡潔な表現

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

が得られる．以後，特に断らない場合はアインシュタインの規約に従う．同じ4次元空間 $\boldsymbol{R}^4$ に基づくユークリッド時空などと区別するため，ミンコフスキー時空を $\boldsymbol{M}$ という記号で表す．

ミンコフスキー時空は多様体であるから接ベクターと余接ベクターを考えることができる．多様体論では方向微分の基底 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ を用いて接ベクターを

$$v = v^\mu \partial_\mu$$

という形に表わし，微分形式の基底 dx^μ を用いて余接ベクターを

$$w = w_\mu dx^\mu$$

という形に表す．物理学では前者を上付き添字をもつ多成分量 $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$，後者を下付き添字をもつ多成分量 $w = (w_0, w_1, w_2, w_3)$ として扱って，それぞれ反変ベクター（contravariant vector）ならびに共変ベクター（covariant vector）と呼ぶ．添字の位置の違いは後述するローレンツ変換の作用の仕方の違いを示すものでもあるが，計量の成分 $\eta_{\mu\nu}$ ならびにその逆行列の成分 $\eta^{\mu\nu}$ （数値的には全く同じもの）を用いて添字の上げ下げ

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu, \quad w^\mu = \eta^{\mu\nu} w_\nu \tag{1.3}$$

を行えば，これら2種類のベクターの間を行き来することができる．

1.2　光円錐

時空点 $q = (q^0, q^1, q^2, q^3)$ に対して方程式

$$\eta_{\mu\nu}(x^\mu - q^\mu)(x^\nu - q^\nu) = 0 \tag{1.4}$$

によって定義される3次元超曲面（錐体をなす）を q を頂点とする光円錐（light cone）という．同時刻面 $x^0 = t$ （ここでは t は任意定数を表している）による光円錐の切り口は3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中で方程式

$$(x^1 - q^1)^2 + (x^2 - q^2)^2 + (x^3 - q^3)^2 = (t - q^0)^2 \tag{1.5}$$

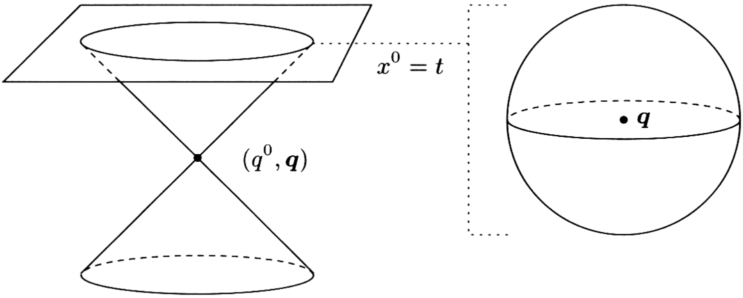


図 **1.1** 光円錐と光の波面

により定義される2次元球面になる．これは時刻 q^0 において3次元空間の点 $\boldsymbol{q} = (q^1, q^2, q^3)$ を発した光の波面に他ならない（図1.1）．

見方を変えれば，光円錐とは時空点 q を通る光子あるいは一般に無質量粒子（massless particle）の世界線の合併集合である．世界線（world line）とは粒子の軌跡を4次元時空内の曲線 $x = (x^0(s), x^1(s), x^2(s), x^3(s))$（$s$ は適当な媒介変数）と見たものである．自由な（すなわち他の粒子や場からの作用を受けない）無質量粒子の世界線は時空内の直線，言い換えれば測地線（geodesics）であり，その接ベクター $v = v^\mu \partial_\mu$ は

$$\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \tag{1.6}$$

という条件を満たす．一般にこの条件を満たす接ベクターはナル（null）であるという．その意味で無質量自由粒子の世界線はナル直線（null line）である．

ちなみに，ミンコフスキー時空の接ベクター $v = v^\mu \partial_\mu$ は

$$\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu > 0 \tag{1.7}$$

という条件を満たすとき時間的（time-like），

$$\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu < 0 \tag{1.8}$$

という条件を満たすとき空間的（space-like）であるという．有質量粒子（massive particle）の世界線も自由粒子である限り直線になるが，その接方向は時間的である．実際，質量 m の自由粒子の場合，エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p} = (p^1, p^2, p^3)$

を組み合わせた 4 次元運動量ベクター $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$（$p^0 = E$）は

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 \tag{1.9}$$

という質量殻（mass shell）の条件を満たす．世界線の接方向はこの 4 次元運動量ベクターのスカラー倍なので時間的である．要するに有質量粒子は進行速度が光よりも遅い．光よりも速く進む（すなわち空間的な世界線をもつ）粒子はタキオン（tachyon）と呼ばれるが，相対論的因果律に抵触するので通常の場の理論では排除される．そもそも，上の質量殻条件に照らせばタキオンの質量は純虚数ということになるので，その点でも解釈に困る存在である．

第 2 章で詳しく解説するように，ツイスター理論では光円錐やナル直線が基本的な役割を果たす．裏返せば，有質量粒子やその場をツイスター理論で扱うことは不可能ではないが（事実，ペンローズ自身の研究も含めて，いろいろな試みがある）何らかの新たな工夫を要する．

1.3　等長変換

ミンコフスキー時空は多様体として線形空間（原点を指定しないという意味ではアフィン空間）であるから，その上に作用する等長変換群としてアフィン変換からなるものを考えるのが自然である．物理的観点ではこれを次の 2 種類に分ける．

1. 局所ローレンツ変換（local Lorentz transformation）：時空点 $q = (q^0, q^1, q^2, q^3)$ を原点として，ローレンツ群 $\mathrm{O}(1,3)$ に属する定数行列 $g = (g^\mu{}_\nu)_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ によって

$$x^\mu \ \rightarrow \ g^\mu{}_\nu (x^\nu - q^\nu) + q^\mu \tag{1.10}$$

と変換する．

2. 並進（translation）：定数ベクター $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ によって

$$x^\mu \ \rightarrow \ x^\mu + a^\mu \tag{1.11}$$

と変換する．

ローレンツ群（Lorentz group）$\mathrm{O}(1,3)$ はここでは計量 ds^2 に関する擬直交群

$$\mathrm{O}(1,3) = \{ g = (g^\mu{}_\nu) \in \mathrm{GL}(4, \boldsymbol{R}) \mid \eta_{\mu\nu} g^\mu{}_\alpha g^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \} \tag{1.12}$$

を意味する．

物理学では，このような変換群は時空点を動かす運動群ではなく，むしろ座標変換の群と見なされる．物理的に見れば，座標系は人為的に導入したものだから，物理法則は座標系によらないものでなければならない．

特殊相対論では物理法則が局所ローレンツ変換と並進に関して不変であることを基本的要請とする．たとえば，スピン自由度をもたない質量 m の自由粒子の場の方程式としてクライン–ゴルドン方程式（Klein-Gordon equation）

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{1.13}$$

がある．ここで $\Box$ はダランベール演算子（D'Alembertian）

$$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$$

を表す．この方程式は明らかに並進によって不変であるが，局所ローレンツ変換に関しても，方向微分の変換が g の逆行列 $g^{-1} = (g_\mu{}^\nu)_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ [†2]によって

$$\partial_\mu \ \to \ g_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

と表せることから不変性がわかる．同様の意味において電磁場（言い換えれば光子の場）を記述するマクスウェル方程式も相対論的に不変な方程式である[†3]．

ただし，素粒子論ではローレンツ群 $\mathrm{O}(1,3)$ そのものではなくて本義ローレンツ群と呼ばれる部分群 $\mathrm{O}_\uparrow^+(1,3)$ に関する不変性のみを要請する[†4]．後述するスピン構造も本義ローレンツ群に関わる概念である．このような意味で素粒子論では本義ローレンツ群の方がむしろ基本的な存在である．

1.4　共形変換

局所ローレンツ群と並進群によって生成されるミンコフスキー時空の等長変換群を非斉次ローレンツ群（inhomogeneous Lorentz group）あるいはポアン

[†2]添字の上げ下げ $g_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}g^\alpha{}_\beta$ によって決まると考えてもよい．

[†3]歴史的経緯はむしろ逆で，マクスウェル方程式のもつ対称性としてローレンツ変換が見出された．

[†4]$\mathrm{O}(1,3)$ には時間反転（time reversal）や空間鏡映（space reflection）が含まれるが，素粒子の世界はそれらについて不変ではない，ということがさまざまな実験結果によって明らかになっている．

カレ群（Poincaré group）という．これは実 10 次元のリー群をなす．これに引き延ばし（dilation）

$$x^\mu \;\to\; cx^\mu \tag{1.14}$$

および反転（inversion）

$$x^\mu \;\to\; \frac{cx^\mu}{\|x\|^2}, \quad \|x\|^2 = x_\nu x^\nu \tag{1.15}$$

（c はいずれも 0 と異なる定数）を加えて生成される有理変換群を共形群（conformal group）と呼び，$C(1,3)$ という記号で表す．ここでは説明を省くが，これは実 15 次元のリー群となる．

共形変換は共形写像（conformal mapping）の一種である．共形写像は計量をスカラー因子を除いて不変に保つ

$$ds^2 \;\to\; e^{f(x)}ds^2 \tag{1.16}$$

という性質によって定義される．特に，時空の各点のナルな接ベクターは共形写像によってナルな接ベクターに写される．時空点におけるナルな接ベクター全体の集合は接空間内の光円錐をなす（これを時空の部分集合としての光円錐と混同してはならない）．一般に 4 次元多様体（平坦でない場合も含めて）の各点の接空間に光円錐が指定された構造は $(+---)$ 型の共形構造（conformal structure）と呼ばれる．その意味で共形写像とは共形構造を保つ（すなわち，接空間に誘導される接写像が光円錐を光円錐に写す）写像に他ならない．

物理的に見れば，このような共形変換の特徴は無質量粒子との関係を予想させる．実際，後の節で見るように，無質量粒子の世界線の考察から編み出されたツイスター理論は共形群に対しても明快な説明を与える．さらに，ツイスター理論を曲がった時空に拡張する際にも共形構造が重要な役割を果たす．

ちなみに，前述の反転の定義式において分母の $\|x\|^2$ が消えるところ，すなわち原点を頂点とする光円錐では写像は意味を失うが，ミンコフスキー時空の共形コンパクト化（conformal compactification）と呼ばれるコンパクト化によってこの点でも写像を意味づけることができる．ここでは説明を省くが，このコンパクト化（$\boldsymbol{M}^\#$ という記号で表される）は位相幾何学的には $S^1 \times S^3$ と同相になる．

1.5 スピン構造

ここで新たな座標

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3),$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \qquad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2) \tag{1.17}$$

を導入する．z, $\bar{z}$ は複素数値であるが，これがまさに複素構造との最初の接点である．これらの座標によってミンコフスキー計量は

$$ds^2 = 2dudv - 2dzd\bar{z} = 2\det\begin{pmatrix} du & d\bar{z} \\ dz & dv \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

という形に表せる．この表示から背後に隠れた $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 変換の構造すなわちスピン構造（spin structure）[†5]が見えてくる．

計量の行列式表示に対応して時空座標 $(u, v, z, \bar{z})$ も 2×2 行列

$$x = \begin{pmatrix} u & \bar{z} \\ z & v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

に組む．単位行列

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

およびパウリ行列（Pauli matrices）

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いれば[†6]この定義式は

[†5] ここでは，スピンを記述する群 $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が時空座標の（本義）ローレンツ変換の群の有限被覆として現れる，という意味で「スピン構造」という言葉を用いている．これは多様体の幾何学における「スピン構造」（参考文献 [119] を参照されたい）と密接に関連するが，後者はスピン群 G に対する G 主束によって定式化される．

[†6] 素粒子論や相対論ではこれらの行列を σ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と表して用いるのが普通である．この定義では $\mu = 1, 2, 3$ に対する行列が逆符号になる．どちらを選んでも本質的な違いはないが，x の行列要素を x^μ で書いたときの見栄えの良さから，ここでは普通とは異なる流儀を採用している．

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_\mu x^\mu \tag{1.20}$$

と表せる．

この行列 x を通じて $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ が時空座標に作用することがわかる．まず，定義から x はエルミート行列，すなわち

$$x^* = {}^{\mathrm{t}}\bar{x} = x \tag{1.21}$$

であり，逆に任意のエルミート行列はこの形に表せる，ということに注意しよう．h を $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に属する任意の行列とすると，hxh^* もまたエルミート行列であるからある時空座標 (x'^μ) が対応する．さらに，hxh^* は x^μ について線形であるから，結局

$$x \ \rightarrow\ x' = hxh^* \tag{1.22}$$

によってミンコフスキー時空の線形座標変換 $T(h)$ が決まることになる．しかも座標の微分は

$$dx' = hdxh^*$$

という関係で結ばれているから

$$\det(dx') = \det(h)\det(dx)\det(h^*) = \det(dx) \tag{1.23}$$

という等式が成立する．すなわちこの線形座標変換 $T(h)$ は計量 ds^2 を保つローレンツ変換である．h を単位元から連続変形する論法によって，この $T(h)$ はローレンツ群 $\mathrm{O}(1,3)$ の単位元成分である本義ローレンツ群（restricted Lorentz group）

$$\mathrm{O}^+_\uparrow(1,3) = \{g = (g^\mu{}_\nu) \in \mathrm{O}(1,3) \mid \det(g) = 1,\ g^0{}_0 \geq 1\} \tag{1.24}$$

に属することがわかる．こうして群準同型

$$T : \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \ \rightarrow\ \mathrm{O}^+_\uparrow(1,3)$$

が得られる．ここでは説明を省くが，これは $\mathrm{O}^+_\uparrow(1,3)$ の 2 重被覆となる．T を $\mathrm{SU}(2)$ に制限すれば $\mathrm{SO}(3)$ の 2 重被覆

$$T : \mathrm{SU}(2) \ \rightarrow\ \mathrm{SO}(3)$$

が得られるが，これは非相対論的スピンの理論の基礎となる．

1.6 ユークリッド時空の場合

以上のような考察を座標 (x^1, x^2, x^3, x^4) と $(++++)$ 型計量

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{1.25}$$

をもつユークリッド時空（Euclidean spacetime）$\boldsymbol{E}$ において展開することもできる．形式的にはミンコフスキー時空からいわゆるウィック回転（Wick rotation）

$$x^0 \ \to \ ix^4, \quad ds^2 \ \to \ -ds^2$$

によってユークリッド時空に移ることができるが，スピン構造は本質的に異なる．すなわち，ユークリッド時空では $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ の代わりに4次元のスピン群 Spin(4) が現れる．一般に偶数次元のスピン群 Spin$(2k)$ はクリフォード代数（Clifford algebra）を用いて定義されて直交群 SO$(2k)$ の2重被覆となるが（参考文献 [119] を参照されたい），4次元の場合には

$$\mathrm{Spin}(4) \simeq \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \tag{1.26}$$

というように2個の SU(2) の直積と同型である．この直積群が現れることは以下のようにして理解することができる．

ミンコフスキー時空の場合にならって複素座標

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + ix^4), \quad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - ix^4), \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - ix^2) \end{aligned} \tag{1.27}$$

を導入する．これによって計量は

$$ds^2 = 2dyd\bar{y} + 2dzd\bar{z} = 2\det\begin{pmatrix} dy & -d\bar{z} \\ dz & d\bar{y} \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

という形に表せる（ケーラー構造との関わりが見て取れる）．これに合わせて座標を 2×2 行列

$$x = \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

に組む[†7]．この行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x \tag{1.30}$$

という代数的関係式によって特徴づけられる．

上に述べた x の構造を保つ線形変換として

$$x \ \rightarrow \ x' = hxk^{-1}, \quad h, k \in \mathrm{SU}(2), \tag{1.31}$$

というものが考えられる．実際，h, k は SU(2) に属する行列として x の場合と同じ代数的関係式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{h} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = k$$

を満たすので，その帰結として x' も同じ代数的関係式を満たす．さらに微分の関係式

$$dx' = hdxk^{-1}$$

から

$$\det(dx') = \det(h)\det(dx)\det(k^{-1}) = \det(dx) \tag{1.32}$$

という等式が得られるので，$x \to x'$ がもとの時空座標に対する直交変換 $T(h, k)$ を定めることがわかる．h, k を単位元から連続変形する論法によって $T(h, k)$ が $O(4)$ の単位元成分すなわち SO(4) の中にとどまることがわかる．こうして

$$T : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \ \rightarrow \ \mathrm{SO}(4)$$

という群準同型が得られる．

[†7] ミンコフスキー時空からのウィック回転と考えればユークリッド時空に対する x を

$$x = \begin{pmatrix} y & \bar{z} \\ z & -\bar{y} \end{pmatrix}$$

定義するのが自然だが，後の議論のためには x を上のように選ぶ方が好都合である（特にツイスターとの関係を四元数で記述する際の諸公式の見栄えが良くなる）．

1.7 超双曲型時空の場合

$(++--)$ という符号の計量

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{1.33}$$

をもつ超双曲型時空 (ultra-hyperbolic spacetime) $\boldsymbol{U}$ もユークリッド時空と同様に扱える．実際，ユークリッド時空の場合と同じ複素座標 $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ を用いれば計量は

$$ds^2 = 2dyd\bar{y} - 2dzd\bar{z} = 2\det\begin{pmatrix} dy & d\bar{z} \\ dz & d\bar{y} \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

という形に書ける．そこで座標を

$$x = \begin{pmatrix} y & \bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

という 2×2 行列に組む．この行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x \tag{1.36}$$

という代数的関係式で特徴づけられる．これを保つ線形変換は

$$x \ \rightarrow \ x' = hxk^{-1}, \quad h, k \in \mathrm{SU}(1,1), \tag{1.37}$$

で与えられる．ここで $\mathrm{SU}(1,1)$ は

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ h \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \ \middle| \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{h} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h \right\} \tag{1.38}$$

という形で実現されている．こうして $\mathrm{SU}(1,1)$ の 2 個の直積から $\boldsymbol{U}$ の計量を保つ線形変換の群 $\mathrm{SO}(2,2)$ への準同型

$$T : \mathrm{SU}(1,1) \times \mathrm{SU}(1,1) \ \rightarrow \ \mathrm{SO}(2,2)$$

が得られる．

ちなみに，上の $\mathrm{SU}(1,1)$ の定義にならえば，$\mathrm{SU}(2)$ は

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ h \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \ \middle| \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{h} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = h \right\} \tag{1.39}$$

と表すことができる．これは一見 SU(1,1) に似ているが，この中に見えているのは SU(1,1) の場合のエルミート形式とは違って一種の交代形式である．その意味でこの SU(2) はむしろシンプレクティック群の特別な場合と考える方がふさわしい．

2 スピナー算法

ミンコフスキー計量を 2×2 行列形式に書き直すことによって本義 Lorentz 群 $O_{\uparrow}^{+}(1,3)$ の 2 重被覆として複素リー群 $SL(2,\boldsymbol{C})$ が現れた．またユークリッド計量や超双曲型計量の場合にもその部分群である SU(2) や SU(1,1) が現れた．これらのリー群の有限次元線形表現に従って変換する量をスピナー（spinor）という．テンサー（その特別な場合として反変・共変ベクターがある）は本義 Lorentz 群の線形表現に従って変換する量であるが，スピナーはテンサーよりも基本的な量と考えられる．たとえば，時空座標を 2×2 行列に組んだものは行と列について異なる変換則に従う混合スピナーと解釈できる．

2.1 反変スピナー

まず $SL(2,\boldsymbol{C})$ の 2 次元線形表現に従って変換するスピナーを考える．2×2 行列 x に組んだミンコフスキー時空の座標が $SL(2,\boldsymbol{C})$ の作用のもとで $x\to hxh^*$ と変換することからわかるように，2 次元線形表現としては

1. $h\in SL(2,\boldsymbol{C})$ がそのまま $\phi\to h\phi$ と作用するもの
2. $h\in SL(2,\boldsymbol{C})$ が複素共役として $\psi\to\bar{h}\psi$ と作用するもの

の 2 種類を考える必要がある．そこで，前者を無点添字（undotted index）$a=0,1$ をもつ 2 成分量 $\phi=(\phi^a)_{a=0,1}$，後者を有点添字（dotted index）$\dot{a}=\dot{0},\dot{1}$ をもつ 2 成分量 $\psi=(\psi^{\dot{a}})_{\dot{a}=\dot{0},\dot{1}}$ と見なして記号上区別する[†8]．h, $\bar{h}$ の行列要素を

[†8] ツイスター理論では $(\phi^A)_{A=0,1}$, $(\psi^{A'})_{A'=0',1'}$ というように大文字の添字とプライムの有無でスピナーの成分を表す記法が用いられることが多いが，ここでは素粒子論や相対性理論で一般的に用いられる記法に従った．なお，a と $\dot{a}$ は（A と A' と同様に）まったく独立の添字として扱われる．そのことを強調するために，それらの値自体を $0,1$ および $\dot{0},\dot{1}$ というように記号的に区別している．

$$h = (h^a{}_b)_{a,b=0,1}, \quad \bar{h} = (\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}})_{\dot{a},\dot{b}=\dot{0},\dot{1}} \tag{1.40}$$

と表せば，$\phi^a, \psi^{\dot{a}}$ は $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ の作用のもとで

$$\phi^a \ \to \ h^a{}_b \phi^b, \quad \psi^{\dot{a}} \ \to \ \bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \psi^{\dot{b}} \tag{1.41}$$

と変換することになる．

この記法に従えば，時空座標の行列 x は

$$x = (x^{a\dot{a}})_{a=0,1;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} \tag{1.42}$$

というように 2 種類の添字の混在する混合スピナー（mixed spinor）として解釈できる．その成分 $x^{a\dot{a}}$ の変換則は

$$x^{a\dot{a}} \ \to \ h^a{}_b \bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} x^{b\dot{b}}$$

と書ける．同様の意味で一般の反変ベクター $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ も

$$v^\mu \partial_\mu = v^{a\dot{a}} \partial_{a\dot{a}}$$

という等式によって混合スピナー $v^{a\dot{a}}$ と対応している．ここで $\partial_{a\dot{a}}$ は

$$\partial_{a\dot{a}} = \partial / \partial x^{a\dot{a}} \tag{1.43}$$

という方向微分を表す．

一般に，これらの 2 次元表現の任意個のテンサー積に従って変換する量として高階の反変スピナー（contravariant spinor）$\varPhi^{a_1 \cdots a_m \dot{a}_1 \cdots \dot{a}_n}$ が考えられる．

2.2 共変スピナー

共変ベクターは $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ の生成する本義ローレンツ変換のもとで反変ベクターとは異なる変換則に従う．具体的には，共変ベクター $w = (w_0, w_1, w_2, w_3)$ の成分から

$$w_\mu dx^\mu = w_{a\dot{a}} dx^{a\dot{a}}$$

という等式によって定まる量 $w_{a\dot{a}}$ は $h = (h^a{}_b)$ の作用のもとで

$$w_{a\dot{a}} \ \to \ H_a{}^b \bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} w_{b\dot{b}}$$

と変換する．ここで $H_a{}^b$, $\bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}$ はそれぞれ ${}^{\mathrm{t}}h^{-1}$, ${}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1}$ の行列要素

$$ {}^{\mathrm{t}}h^{-1} = (H_a{}^b)_{a,b=0,1}, \quad {}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1} = (\bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}})_{\dot{a},\dot{b}=\dot{0},\dot{1}} \tag{1.44} $$

を表す．あとで触れるように，これらの行列要素は $h, \bar{h}$ の行列要素と添字の上げ下げによって結ばれている．

このことを踏まえて，新たな 2 次元線形表現として

1. $h \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が反傾（contragradient）行列として $\phi \to {}^{\mathrm{t}}h^{-1}\phi$ と作用するもの
2. $h \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ が複素共役の反傾行列として $\psi \to {}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1}\psi$ と作用するもの

の 2 種類を導入する．この線形表現に従う量 ϕ, ψ をそれぞれ $\phi = (\phi_a)_{a=0,1}$ および $\psi = (\psi_{\dot{a}})_{\dot{a}=\dot{0},\dot{1}}$ というように下付きの添字をもつ 2 成分量として表す．成分で書いた変換則は

$$ \phi_a \ \to \ H_a{}^b\phi_b, \quad \psi_{\dot{a}} \ \to \ \bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\psi_{\dot{b}} \tag{1.45} $$

という形になる．

一般に，これらの 2 次元線形表現のテンソー積に従って変換する量として高階の共変スピナー（covariant spinor）$\Phi_{a_1\cdots a_m\dot{a}_1\cdots\dot{a}_n}$ が考えられる．

2.3　スピナーとテンサー

一般のスピナーは前述の 4 種類の 2 次元表現のテンサー積に従って変換する．たとえば $\Phi^a{}_{b\dot{b}}$ というスピナーは

$$ \Phi^a{}_{b\dot{b}} \ \to \ h^a{}_c H_b{}^d H_{\dot{b}}{}^{\dot{d}} \Phi^c{}_{d\dot{d}} $$

という変換則に従う．スピナーの上下の添字を $\Phi^a{}_{a\dot{b}}$ というように縮約したものは残りの添字についてスピナーとなる．

このようなスピナーに対して，テンサー（tensor）は本義ローレンツ群の有限次元線形表現に従って変換する[†9]．基本的なテンサーは反変ベクターと共変ベクターであるが，そこには本義ローレンツ群に属する行列 $g = (g^\mu{}_\nu)$ が直接にあるいは反傾表現として

[†9] ここでは相対論におけるテンサーについて考えている．テンサーの概念は本来は計量と無関係で，多様体の接空間と余接空間（あるいは接束と余接束）の任意個のテンサー積に属する量として定義される．

$$v^\mu \;\to\; g^\mu{}_\nu v^\nu, \quad w_\mu \;\to\; g_\mu{}^\nu w_\nu \tag{1.46}$$

と作用する（すでに出会ったように，$g_\mu{}^\nu$ は g の逆行列の行列要素を表す）．一般のテンサーの変換則はこれから決まる．たとえば $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ というテンサーは

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} \;\to\; g^\lambda{}_\alpha g_\mu{}^\beta g_\nu{}^\gamma T^\alpha{}_{\beta\gamma}$$

という変換則に従う．

反変・共変ベクターを混合スピナーと見なす前述の規則を踏襲すれば，一般のテンサーをスピナーに翻訳することができる．例として再び $T^\lambda{}_{\mu\nu}$ という型のテンサーを取り上げるならば，対応するのは $T^{a\dot a}{}_{b\dot b c\dot c}$ という型のスピナーであり，両者は

$$T^\lambda{}_{\mu\nu}\partial_\lambda \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu = T^{a\dot a}{}_{b\dot b c\dot c}\partial_{a\dot a} \otimes dx^{b\dot b} \otimes dx^{c\dot c}$$

という等式でお互いに結ばれる．このようにしてテンサーから得られるスピナーは明らかに特殊な型のもの（有点添字と無点添字の個数が一致する）に限られる．それ以外のスピナーはテンサーには対応しない．この意味でスピナーはテンサーよりも基本的な量と考えられる．

2.4 スピナー添字の上げ下げ

ベクターの場合と同様に，テンサーの添字も計量の成分 $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$ によって

$$T^{\cdots\ \cdots}_{\cdots\mu\cdots} = \eta_{\mu\nu} T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\ \cdots}, \quad T^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\ \cdots} = \eta^{\mu\nu} T^{\cdots\ \cdots}_{\cdots\nu\cdots} \tag{1.47}$$

というように上げ下げできる．これによって得られるものは所要の変換性をもつ新たなテンサーとなる．

スピナーに対しても添字の上げ下げを考えることができる．そのために

$$(\epsilon_{ab})_{a,b=0,1} = (\epsilon^{ab})_{a,b=0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

および

$$(\epsilon_{\dot a\dot b})_{\dot a,\dot b=\dot 0,\dot 1} = (\epsilon^{\dot a\dot b})_{\dot a,\dot b=\dot 0,\dot 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義される量 ϵ_{ab}, ϵ^{ab}, $\epsilon_{\dot a\dot b}$, $\epsilon^{\dot a\dot b}$ を導入する．スピナー添字の上げ下げは

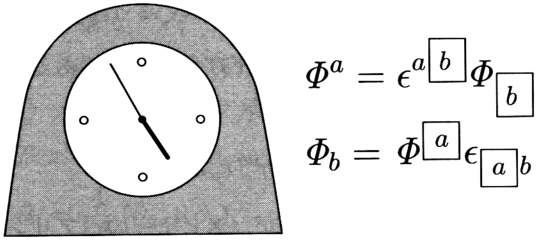


図 1.2 「5 時 5 分前」の規則

$$\Phi^{\cdots a \cdots}_{\cdots\ \ \cdots} = \epsilon^{ab}\Phi^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots b \cdots},\quad \Psi^{\cdots \dot{a} \cdots}_{\cdots\ \ \cdots} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\Psi^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots \dot{b} \cdots},$$
$$\Phi^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots b \cdots} = \Phi^{\cdots a \cdots}_{\cdots\ \ \cdots}\epsilon_{ab},\quad \Psi^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots \dot{b} \cdots} = \Psi^{\cdots \dot{a} \cdots}_{\cdots\ \ \cdots}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tag{1.48}$$

という規則に従って行われる．縮約する添字が常に左上から右下に向かって並ぶこと（「5 時 5 分前」の規則）に注意されたい（図 1.2）．

この添字の上げ下げの操作がスピナーの変換性を壊さないことは任意の 2×2 行列 M に対して成立する等式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Cof}(M) \quad （M \text{ の余因子行列}）$$

からの帰結である．実際，この等式ならびに添字の上げ下げの規則を $h \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に適用すれば $h, \bar{h}$ の行列要素 $h^a{}_b, \bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$ と ${}^{\mathrm{t}}h^{-1}$, ${}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1}$ の行列要素 $H_a{}^b, \bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}$ の間に

$$H_a{}^b = -h_a{}^b, \quad \bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} = -\bar{h}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \tag{1.49}$$

という関係があることがわかり，それを用いて所用の変換性を確かめることができる．

ちなみに，$\epsilon_{ab}, \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ を用いれば計量の行列式表示を

$$ds^2 = \epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}dx^{a\dot{a}}dx^{b\dot{b}} \tag{1.50}$$

という形に書き直せる．これは $\eta_{\mu\nu}$ に対応するスピナーが

$$\eta_{a\dot{a}b\dot{b}} = \epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tag{1.51}$$

であることを示している．

スピナー添字の上げ下げは係数 ϵ_{ab}, $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$, ϵ^{ab}, $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ が添字について反対称であるという点においてテンサー添字の上げ下げとは異質である．実際，添字の縮約によるベクターのペアリング $v_\mu w^\mu$ は

$$v_\mu w^\mu = \eta^{\mu\nu} v_\mu w_\nu$$

と書き直してみれば内積に他ならないが，スピナーのペアリング $\phi_a \psi^a$ は

$$\phi_a \psi^a = \epsilon^{ab} \phi_a \psi_b$$

というようにむしろシンプレクティック形式である．特に，ベクターのペアリングの場合に成立する等式

$$v_\mu w^\mu = v^\mu w_\mu$$

はスピナーの場合には

$$\phi_a \psi^a = -\phi^a \psi_a$$

というように負符号を伴うので注意が必要である．

注意 場の量子論を視野に入れれば，ϕ_a のような奇数階のスピナーの成分は反可換 (anti-commuting) すなわち $\phi_b \phi_a = -\phi_a \phi_b$ という交換関係に従うものとして扱うのが自然である．そのような場で記述される粒子をフェルミオン (fermion) という．ϕ_a, ψ_a が互いに反可換な量であれば前述の $\phi_a \psi^a$ は対称な内積と見なせる．以下ではこのことが問題になる場面はないので，奇数階のスピナーの成分も可換量であるとして話を進める．

3 スピナー形式の自由場の方程式

相対論的不変性（あるいは共変性）をもつ場の方程式はスピナーの言葉で統一的に記述することができる．この節ではディラック方程式およびマクスウェル方程式を例に選んで，自由場の方程式をスピナー形式で表すことについて説明する．特に無質量場の場合には，スピン 1/2 の場に対するワイル方程式の一般化として，任意の半整数スピンに対する 2 種類のスピナー場の方程式が考えられる．

3.1　クライン–ゴルドン方程式

スピン自由度をもつ場の方程式を扱う前に，スピン自由度をもたないスカラー場の方程式であるクライン–ゴルドン方程式について考える．

2 組の時空座標系 x^0, x^1, x^2, x^3 と $u, v, z, \bar{z}$ の方向微分の間には線形関係

$$\partial_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_u + \partial_v), \qquad \partial_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_u - \partial_v),$$

$$\partial_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_z + \partial_{\bar{z}}), \qquad \partial_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_z - \partial_{\bar{z}})$$

あるいはそれを逆に解いた関係

$$\partial_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + \partial_3), \qquad \partial_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 - \partial_3),$$

$$\partial_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2), \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2)$$

が成り立つ．これによってダランベール演算子が

$$\Box = 2(\partial_u\partial_v - \partial_z\partial_{\bar{z}}) = 2\det\begin{pmatrix} \partial_u & \partial_{\bar{z}} \\ \partial_z & \partial_v \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

と表せることがわかる．

ここに現れた 2×2 行列は $x^{a\dot{a}}$ に関する方向微分 $\partial_{a\dot{a}}$ を並べたもの

$$\begin{pmatrix} \partial_u & \partial_{\bar{z}} \\ \partial_z & \partial_v \end{pmatrix} = (\partial_{a\dot{a}})_{a=0,1;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} \tag{1.53}$$

に他ならない．$\partial_{a\dot{a}}$ は $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ の作用に関して余接ベクター場 $w = w_{a\dot{a}}dx^{a\dot{a}}$ の成分 $w_{a\dot{a}}$ と同じ変換則に従うので，スピン添字の上げ下げの規則を $\partial_{a\dot{a}}$ にも適用して

$$\partial^{a\dot{a}} = \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\partial_{b\dot{b}}$$

と定める．これに従えばダランベール演算子は

$$\Box = \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\partial_{a\dot{a}}\partial_{b\dot{b}} = \partial_{a\dot{a}}\partial^{a\dot{a}} \tag{1.54}$$

と表せるので，クライン–ゴルドン方程式は

$$(\partial_{a\dot{a}}\partial^{a\dot{a}} + m^2)\phi = 0 \tag{1.55}$$

という形に書ける．特に無質量（$m=0$）の場合には

$$\partial_{a\dot{a}}\partial^{a\dot{a}}\phi=0 \tag{1.56}$$

となる．これらはいわゆる双曲型波動方程式（hyperbolic wave equation）である．クライン–ゴルドン方程式はスピン自由度をもたない（すなわちスピン 0 の）スカラー場を記述する方程式なので，このあとで議論するスピン $s>0$ の場の方程式とは異質であるが，時空変数に関する部分はこのようにスピナー形式で書ける．

3.2 ディラック方程式

ディラック方程式（Dirac equation）はスピン 1/2 の有質量スピナー場の方程式で，電磁場などとの相互作用がない場合には

$$(\gamma^\mu\partial_\mu+im)\Psi=0 \tag{1.57}$$

という形をとる．ここで Ψ は 4 成分場であり，γ^μ （$\mu=0,1,2,3$）はそれに作用する 4×4 行列（ディラックのガンマ行列と呼ばれる）で

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\eta^{\mu\nu}1 \tag{1.58}$$

という代数的関係式（クリフォード代数の一種）を満たすものである（混乱を招く恐れのない限り，1 で単位行列も表すことにする）．$\gamma^\mu\partial_\mu$ はディラック演算子（Dirac operator）と呼ばれる．

Ψ の各成分が質量 m のクライン–ゴルドン方程式を満たすことを注意しておこう．実際，ディラックの方程式を

$$\gamma^\mu\partial_\mu\Psi=-im\Psi$$

という形に書き直し，再度 $\gamma^\mu\partial_\mu$ を両辺に作用させれば

$$(\gamma^\mu\partial_\mu)^2\Psi=-m^2\Psi$$

という方程式が得られるが，左辺の微分演算子は γ^μ の満たす代数的関係式によって

$$
\begin{aligned}
(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \\
&= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu \\
&= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu
\end{aligned}
$$

というようにダランベール演算子に帰着する．ちなみにディラックはこの計算を逆にたどる形で，すなわちダランベール演算子の「平方根」をスカラー係数ではなくて行列係数の微分演算子として求める，という発見的考察を経て上の方程式に到達したという．

γ^μ は上に示した代数的関係式を満たす限りどのように選んでもかまわないが，目的に応じていくつかの標準的な選び方が用意されている．その中でもカイラル表示（chiral representation）と呼ばれるものは

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{1.59}$$

という行列に関連している．γ^5 は 2 乗すると単位行列になるという性質 $(\gamma^5)^2 = 1$ をもつ．物理的に言えば，その固有値 ± 1 の固有空間はスピンが進行方向に向かって右回り（right-handed）か左回り（left-handed）の一方に偏った状態からなる（図 1.3）．前者をヘリシティ 1/2，後者をヘリシティ $-1/2$ の状態という．一般にヘリシティ（helicity）とは，このように無質量粒子や場のスピンの偏り状態を指定する数値的ラベルである．γ^5 がこれらの状態に関して対角化されているような γ^μ の選び方をカイラル表示という．たとえば

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.60}$$

という 2×2 ブロックからなる行列がカイラル表示の例である．対応する γ^5 は



図 1.3 スピンが進行方向に対して左回り・右回りに偏った状態

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

上に示したカイラル表示においてディラック演算子は

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 + \sigma^k \partial_k \\ \partial_0 - \sigma^k \partial_k & 0 \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

という形になる（k に関する総和は $k = 1, 2, 3$ にわたる）．行列要素ごとに調べてみれば，非対角ブロックに現れた微分演算子はそれぞれ

$$\begin{aligned} \partial_0 - \sigma^k \partial_k &= (\sqrt{2}\partial_{a\dot{a}})_{\dot{a}=\dot{0},\dot{1}(\downarrow);a=0,1(\rightarrow)}, \\ \partial_0 + \sigma^k \partial_k &= (\sqrt{2}\partial^{a\dot{a}})_{a=0,1(\downarrow);\dot{a}=\dot{0},\dot{1}(\rightarrow)} \end{aligned} \tag{1.62}$$

となることがわかる（$\downarrow$ は行の添字，$\rightarrow$ は列の添字であることを示す）．スピナー添字 $a, \dot{a}$ の役割が各演算子で異なることに注意されたい．Ψ を一対のスピナー ϕ^a, $\psi_{\dot{a}}$ の組である双スピナー（bispinor）

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \psi_{\dot{0}} \\ \psi_{\dot{1}} \end{pmatrix}$$

と見なせば，ディラック方程式はこれらのスピナー場に対する連立方程式

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\partial_{a\dot{a}}\phi^a + im\psi_{\dot{a}} &= 0, \\ \sqrt{2}\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}} + im\phi^a &= 0 \end{aligned} \tag{1.63}$$

に帰着する．無質量（$m = 0$）の場合にはこの連立方程式は二つの方程式

$$\partial_{a\dot{a}}\phi^a = 0, \quad \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}} = 0 \tag{1.64}$$

に分離する．このことはワイル（H. Weyl）によって見出されたので，これらの方程式はワイル方程式（Weyl equation）と呼ばれる．このように無質量のディラック方程式は既約ではなくて2個のワイル方程式に分かれる．特に，ϕ^a, $\psi_{\dot{a}}$ の一方の成分のみ残るような解が許される．そのような解は前述の意味でスピ

ンが「右回り」か「左回り」の一方に偏っている[†10].

ちなみに，クライン–ゴルドン方程式やディラック方程式に電磁場を導入するには

$$\partial_\mu \ \rightarrow \ D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu \tag{1.65}$$

という置換えを行えばよい[†11]. ここで A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は電磁場の 4 次元ポテンシャル（スカラーポテンシャルとベクターポテンシャルを組にしたもの）である．これをスピナー形式に翻訳するには

$$A_\mu dx^\mu = A_{a\dot{a}} dx^{a\dot{a}}$$

という関係式で $A_{a\dot{a}}$ を導入して

$$\partial_{a\dot{a}} \ \rightarrow \ D_{a\dot{a}} = \partial_{a\dot{a}} - iA_{a\dot{a}} \tag{1.66}$$

という置換えを行えばよい．実際，上の置換えによって現れる行列 $\gamma^\mu A_\mu$ も $\gamma^\mu \partial_\mu$ と同様のブロック構造をもつので，電磁場を導入したディラック演算子は

$$\gamma^\mu D_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} D^{a\dot{a}} \\ \sqrt{2} D_{a\dot{a}} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.67}$$

と表せる（ここでも添字 $a, \dot{a}$ の役割は二つの非対角ブロックで異なる）．これからスピナー場の成分が

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} D_{a\dot{a}} \phi^a + im\psi_{\dot{a}} = 0, \\ &\sqrt{2} D^{a\dot{a}} \psi_{\dot{a}} + im\phi^a = 0 \end{aligned} \tag{1.68}$$

という方程式に従うことがわかる．$m = 0$ とすることによって電磁場を含むワイル方程式

$$D_{a\dot{a}} \phi^a = 0, \quad D^{a\dot{a}} \psi_{\dot{a}} = 0 \tag{1.69}$$

が得られる．

[†10] そのような状態しか許されないスピン 1/2 の粒子はカイラルフェルミオン（chiral fermion）と呼ばれる．素粒子の世界が空間鏡映対称性をもたないことの要因はカイラルフェルミオンの存在にある．

[†11] 素粒子論の設定ではスピナー場の電荷 e を入れた形で $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ と定義する．ここでは $e = 1$ と選んだわけだが，これは本質的なことではない．

3.3 マクスウェル方程式

真空中のマクスウェル方程式もスピナー形式の自由場の方程式に帰着する．この議論は少し長くなるので段階を追って説明することにしよう．

i) マクスウェル方程式の相対論的形式

マクスウェル方程式（Maxwell equation）は

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \partial_t \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho,$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.70}$$

の四つの方程式からなる†12．$\boldsymbol{E} = (E^1, E^2, E^3)$ と $\boldsymbol{B} = (B^1, B^2, B^3)$ はそれぞれ電場と磁場を表す．ρ と $\boldsymbol{j} = (j^1, j^2, j^3)$ は電荷密度と電流密度である．$\nabla\times$ と $\nabla\cdot$ は $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ によって3次元ベクター場の回転 rot と発散 div を表したものである．

4次元テンサー場 $F_{\mu\nu}$, $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ を

$$(F_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\widetilde{F}_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すれば，マクスウェル方程式を相対論的に不変な形

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \quad \partial^\mu \widetilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.71}$$

に書き直すことができる．ここで j^μ は $j^0 = \rho$, $(j^1, j^2, j^3) = \boldsymbol{j}$ で定義される4次元電流ベクターである．テンサー場 $F_{\mu\nu}$, $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ を見比べれば，$\widetilde{F}_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu}$ に対して

---

†12 $\boldsymbol{0}$（太字のゼロ）はゼロベクター $(0,0,0)$ を表す．

$$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{B} \tag{1.72}$$

という置換えを行ったものであることがわかる．真空中（すなわち $\rho = 0, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ の場合）のマクスウェル方程式は明らかにこの電場と磁場の置換えに対して不変である．これを電磁双対性（electro-magnetic duality）という．以後はもっぱら真空中のマクスウェル方程式を考える．

ii) 微分形式による表現

電磁双対性は微分形式に対するホッジの $*$ 演算子（Hodge's $*$ operator）と関係がある．$F_{\mu\nu}$, $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ は添字について反対称なので，2 次微分形式

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \widetilde{F} = \frac{1}{2} \widetilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と対応する．ミンコフスキー計量に関する $*$ 演算子は 2 次微分形式の基底 $dx^\mu \wedge dx^\nu$ に対して

$$*(dx^0 \wedge dx^j) = -dx^k \wedge dx^l, \quad *(dx^j \wedge dx^k) = dx^0 \wedge dx^l$$
$$(j, k, l \text{ は } 1, 2, 3 \text{ の巡回置換}) \tag{1.73}$$

と作用する．これから $\widetilde{F}$ が F に $*$ 演算子を作用させたものに他ならないこと

$$\widetilde{F} = *F \tag{1.74}$$

がわかる．

これらの 2 次微分形式 F を用いればマクスウェル方程式自体が

$$dF = 0, \quad d{*F} = 0 \tag{1.75}$$

と表せる．実際，ていねいに計算してみればこれらの方程式がそれぞれ $\partial^\mu \widetilde{F}_{\mu\nu} = 0$ と $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ に対応することが確かめられる．$dF = 0$ は F が局所的にある 1 次微分形式 $A = A_\mu dx^\mu$ によって $F = dA$ と表せることを意味する．成分で見れば

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.76}$$

となる．A_μ は電磁場の 4 次元ポテンシャルに他ならない．$\phi = A^0$, $\boldsymbol{A} = (A^1, A^2, A^3)$ と定めれば電場と磁場に対するよく知られた表示

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial_t \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

が得られる[†13].

iii) 対称スピナー場への分解

$F_{\mu\nu}$ に対して

$$F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = F_{a\dot{a}b\dot{b}}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}}$$

という等式を満たすようなスピナー場 $F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ が決まる．$F_{\mu\nu}$ の添字に関する反対称性から，このスピナー場は

$$F_{b\dot{b}a\dot{a}} = -F_{a\dot{a}b\dot{b}}$$

という等式を満たす．このようなスピナー場は次のように 2 個の対称スピナー場に分解できる．

補題 1.1 一般に $F_{b\dot{b}a\dot{a}} = -F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ という等式を満たすスピナー $F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ は一意的に

$$F_{a\dot{a}b\dot{b}} = \epsilon_{ab}\psi_{\dot{a}\dot{b}} + \phi_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tag{1.77}$$

という形に表せる．ここで $\psi_{\dot{a}\dot{b}}, \phi_{ab}$ は添字について対称な（すなわち $\psi_{\dot{b}\dot{a}} = \psi_{\dot{a}\dot{b}}$, $\phi_{ba} = \phi_{ab}$ という等式が成立する）スピナーであり，$F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ から

$$\psi_{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}F_{a\dot{a}b\dot{b}}, \quad \phi_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}F_{a\dot{a}b\dot{b}} \tag{1.78}$$

というように決まる．

証明 $F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ を

$$\begin{aligned} F_{a\dot{a}b\dot{b}} &= \frac{1}{2}(F_{a\dot{a}b\dot{b}} - F_{b\dot{b}a\dot{a}}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{a\dot{a}b\dot{b}} - F_{b\dot{a}a\dot{b}}) + \frac{1}{2}(F_{b\dot{a}a\dot{b}} - F_{b\dot{b}a\dot{a}}) \end{aligned}$$

と書き直す．$F_{a\dot{a}b\dot{b}} - F_{b\dot{a}a\dot{b}}$ は a, b について反対称だから，$(a,b) = (0,1)$ に対

[†13] ちなみに，電荷・電流密度がゼロでない場合にも $dF = 0$ は成り立つので，これらのポテンシャルは真空中でなくても導入できる．他方 $d{*}F = 0$ の方は $d{*}F = -*j$ という形に変わる．ここで j は 4 次元電流ベクターに対応する 1 次微分形式 $j_\mu dx^\mu$ である（$*$ 演算子は 1 次微分形式を 3 次微分形式に変える）．

する成分が与えられれば他の成分はそれを ϵ_{ab} 倍したものとして

$$F_{a\dot{a}b\dot{b}} - F_{b\dot{a}a\dot{b}} = \epsilon_{ab}(F_{0\dot{a}1\dot{b}} - F_{1\dot{a}0\dot{b}})$$

と表せる．他方，$(a,b) = (0,1)$ に対する成分は

$$F_{0\dot{a}1\dot{b}} - F_{1\dot{a}0\dot{b}} = \epsilon^{ab}F_{a\dot{a}b\dot{b}} = 2\psi_{\dot{a}\dot{b}}$$

と書ける．したがって

$$\frac{1}{2}(F_{a\dot{a}b\dot{b}} - F_{b\dot{a}a\dot{b}}) = \epsilon_{ab}\psi_{\dot{a}\dot{b}}$$

という等式が得られる．同様にして

$$\frac{1}{2}(F_{b\dot{a}a\dot{b}} - F_{b\dot{b}a\dot{a}}) = \phi_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$$

という等式も得られる．こうして (1.77) の表示が成立することがわかる．さらに，(1.77) を直接 ϵ^{ab}, $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ と縮約すれば求める形で $\psi_{\dot{a}\dot{b}}$, ϕ_{ab} の表示が得られるので，(1.77) の表示の一意性がわかる．□

注意　無点添字のみをもつ完全対称 n 階スピナー $\phi_{a_1\cdots a_n}$ は $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}e^0 \oplus \boldsymbol{C}e^1$ の n 次対称積 $S^n(\boldsymbol{C}^2)$ の要素

$$\phi_{a_1\cdots a_n}e^{a_1}\cdots e^{a_n} \in S^n(\boldsymbol{C}^2)$$

に対応する．同じことは有点添字のみをもつ完全対称スピナーについても言える．$S^n(\boldsymbol{C}^2)$ は $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ の有限次元既約表現を与えるから，上の補題は与えられたスピナー表現を既約なスピナー表現に分解することの例と見ることができる．

iv) 自己双対・反自己双対な微分形式との関係

(1.77) を 2 次微分形式の関係に書き直せば

$$F = \psi_{\dot{a}\dot{b}}S^{\dot{a}\dot{b}} + \phi_{ab}S^{ab} \tag{1.79}$$

となる．ここで $S^{\dot{a}\dot{b}}$, S^{ab} は

$$S^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}}, \quad S^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}} \tag{1.80}$$

と定義される 2 次微分形式である[†14]．具体的に座標で書き下していねいに調

[†14] ここでは添字記号の違いで二つの微分形式を区別するというやや紛らわしい（しかしツイスター理論では慣用の）記号法を用いている．$a, b = 0, 1$, $\dot{a}, \dot{b} = \dot{0}, \dot{1}$ というように添字の種類によってその変域自体が異なるので，このような記号法でも区別できるのである．

べればわかるように，これらの2次微分形式は

$$*S^{\dot{a}\dot{b}} = iS^{\dot{a}\dot{b}}, \quad *S^{ab} = -iS^{ab} \tag{1.81}$$

という等式を満たす．一般に，ミンコフスキー時空上の2次微分形式 ω が $*\omega = i\omega$ という条件を満たすとき自己双対（self-dual），また $*\omega = -i\omega$ という条件を満たすとき反自己双対（anti-self-dual）であるという．この意味で $S^{\dot{a}\dot{b}}$ は自己双対，S^{ab} は反自己双対である．

自己双対・反自己双対性は次のような線形代数的な意味をもつ．ミンコフスキー時空の $*$ 演算子は2乗すると -1 になる

$$*^2 = -1 \tag{1.82}$$

という性質をもつ．したがって，$*$ 演算子を各時空点 $x \in \boldsymbol{M}$ における2次微分形式のなす線形空間 $\Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{M})$ からそれ自体への線形写像と見なすとき，$*$ 演算子は固有値 $\pm i$ をもつ．$\Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{M})$ は対応する固有空間

$$\Lambda_\pm^2(T_x^*\boldsymbol{M}) = \{\omega \in \Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{M}) \mid *\omega = \pm i\omega\}$$

の直和に分解する：

$$\Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{M}) = \Lambda_+^2(T_x^*\boldsymbol{M}) \oplus \Lambda_-^2(T_x^*\boldsymbol{M}) \tag{1.83}$$

これらの固有空間の要素が自己双対・反自己双対な微分形式に他ならない．$\Lambda_\pm^2(T_x^*\boldsymbol{M})$ はいずれも3次元で，$S^{\dot{a}\dot{b}}$ あるいは S^{ab} によって張られる（$S^{\dot{a}\dot{b}}$, S^{ab} はともに添字について対称だからそれぞれが実質的には3個の微分形式の組である）．

(1.79) はこの直和分解に基づく F の分解表示と見ることができる．そこに $*$ 演算子を作用させれば $*F$ に対する同様の表示

$$*F = i\psi_{\dot{a}\dot{b}}S^{\dot{a}\dot{b}} - i\phi_{ab}S^{ab} \tag{1.84}$$

が得られる．特に F の自己双対部分 $F_+ = (F - i*F)/2$ と反自己双対部分 $F_- = (F + i*F)/2$ は

$$F_+ = \psi_{\dot{a}\dot{b}}S^{\dot{a}\dot{b}}, \quad F_- = \phi_{ab}S^{ab} \tag{1.85}$$

と表せる．

注意　複素共役によって $S^{\dot{a}\dot{b}}$ と S^{ab} は互いに

$$S^{00} \leftrightarrow S^{\dot{0}\dot{0}}, \quad S^{01} = S^{01} \leftrightarrow S^{\dot{0}\dot{1}} = S^{\dot{1}\dot{0}}, \quad S^{11} \leftrightarrow S^{\dot{1}\dot{1}}$$

というように移り合うので，F の複素共役は

$$\overline{F} = \bar{\psi}_{ab}S^{ab} + \bar{\phi}_{\dot{a}\dot{b}}S^{\dot{a}\dot{b}} \tag{1.86}$$

と表せる．ここで $\bar{\psi}_{ab}, \bar{\phi}_{\dot{a}\dot{b}}$ は $\psi_{\dot{a}\dot{b}}, \phi_{ab}$ の複素共役を表す（このように複素共役に際してはスピナー添字の点の有無が入れ替わることに注意されたい[†15]）．したがって F の実数性の必要十分条件として

$$\overline{F} = F \iff \bar{\phi}_{\dot{a}\dot{b}} = \psi_{\dot{a}\dot{b}} \iff \bar{\psi}_{ab} = \phi_{ab} \tag{1.87}$$

が得られる．このことから特に，自己双対・反自己双対な電磁場はゼロでない限り実数値であり得ない，ということがわかる．これはミンコフスキー時空特有の事情である．ユークリッド時空や超双曲型時空では $*$ 演算子の性質が違う（$*^2 = 1$ となる）ので実数性と自己双対性・反自己双対性は両立できる．

v) 対称スピナー場に対する場の方程式

F の自己双対・反自己双対部分を用いてマクスウェル方程式を書き直せば

$$dF_+ = 0, \quad dF_- = 0 \tag{1.88}$$

となる．これらに関して次のことがわかる．

補題 1.2　$dF_\pm = 0$ は $\psi_{\dot{a}\dot{b}}, \phi_{ab}$ に対する次のような方程式と同値である：

$$dF_+ = 0 \iff \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0,$$
$$dF_- = 0 \iff \partial^{a\dot{a}}\phi_{ab} = 0$$

証明　$F_\pm$ に対する前述の表示を微分すれば

$$dF_+ = d\psi_{\dot{a}\dot{b}} \wedge S^{\dot{a}\dot{b}}, \quad dF_- = d\phi_{ab} \wedge S^{ab}$$

となる．これをていねいに計算すればよい．たとえば前者については，まず

[†15] これは SL$(2,\boldsymbol{C})$ の作用を考えればわかる．複素共役に移れば SL$(2,\boldsymbol{C})$ の作用も複素共役に変わる．スピナー添字の点の有無は SL$(2,\boldsymbol{C})$ が直接に作用するか複素共役で作用するかを区別するためのものであるから，スピナーの複素共役では無点添字と有点添字が入れ替わるのである．

$$dF_+ = \frac{1}{2}\partial_{c\dot{c}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}dx^{c\dot{c}} \wedge \epsilon_{ab}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}}$$
$$= \frac{1}{2}\partial_{c\dot{c}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{ab}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}} \wedge dx^{c\dot{c}}$$

と展開してから $(a,b) = (0,1)$ および $(a,b) = (1,0)$ の寄与に分ける．$(a,b) = (1,0)$ の寄与は $\dot{a}, \dot{b}$ を入れ替えれば $(a,b) = (0,1)$ の寄与と同じなので

$$dF_+ = \partial_{c\dot{c}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}dx^{0\dot{a}} \wedge dx^{1\dot{b}} \wedge dx^{c\dot{c}}$$

となる．これを $c=0$ と $c=1$ の寄与に分けてそれぞれに対して恒等式

$$dx^{0\dot{a}} \wedge dx^{0\dot{c}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{c}}dx^{0\dot{0}} \wedge dx^{0\dot{1}}, \quad dx^{1\dot{b}} \wedge dx^{1\dot{c}} = \epsilon^{\dot{b}\dot{c}}dx^{1\dot{0}} \wedge dx^{1\dot{1}}$$

を用いれば

$$dF_+ = \epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\partial_{0\dot{c}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}dx^{0\dot{0}} \wedge dx^{1\dot{b}} \wedge dx^{0\dot{1}} + \epsilon^{\dot{b}\dot{c}}\partial_{1\dot{c}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}dx^{0\dot{a}} \wedge dx^{1\dot{0}} \wedge dx^{1\dot{1}}$$
$$= -\partial^{1\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}dx^{0\dot{0}} \wedge dx^{1\dot{b}} \wedge dx^{0\dot{1}} + \partial^{0\dot{b}}\psi_{\dot{a}\dot{b}}dx^{0\dot{a}} \wedge dx^{1\dot{0}} \wedge dx^{1\dot{1}}$$

と変形できる．最後に現れたものは線形独立な3次微分形式の和であり，その係数をゼロとおいて得られる方程式

$$\partial^{1\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0, \quad \partial^{0\dot{b}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0$$

が求める方程式 $\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0$ に他ならない（対称性 $\psi_{\dot{a}\dot{b}} = \psi_{\dot{b}\dot{a}}$ に注意されたい）．$dF_- = 0$ も同様にして扱える．□

こうして真空中のマクスウェル方程式は最終的に

$$\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{b}} = 0, \quad \partial^{a\dot{a}}\phi_{ab} = 0 \tag{1.89}$$

という2組の方程式に帰着することがわかる．これらの方程式はスピン1の無質量自由場の方程式と呼ばれるものに他ならない．詳しく言えば，前者はヘリシティ1，後者はヘリシティ -1 の方程式である．スピン1/2のワイル方程式の物理的解釈と同様，正ヘリシティは「右回り」，負ヘリシティは「左回り」を意味する．

3.4　無質量自由場の方程式

ワイル方程式やマクスウェル方程式から導かれたスピナー場の方程式を一般化すれば，一般の半整数 $s = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ に対して

$$\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_{2s}} = 0, \tag{1.90}$$

$$\partial^{a\dot{a}}\phi_{aa_2\cdots a_{2s}} = 0 \tag{1.91}$$

という場の方程式が考えられる．ここで $\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}$, $\phi_{a_1\cdots a_{2s}}$ は $2s$ 個の添字をもつ完全対称なスピナー場である．これらをスピン s の無質量自由場の方程式 (massless free field equations) と呼ぶ．詳しく言えば，前者はヘリシティ s，後者はヘリシティ $-s$ の方程式である．すでに示したように，無質量ディラック方程式はスピン 1/2 の，また真空中のマクスウェル方程式はスピン 1 の場合に相当する．さらに，ここでは説明を省くが，真空中の（すなわち電磁場も含めて重力場以外の場や物質の存在しない設定での）重力場に対するアインシュタイン方程式をミンコフスキー時空からのずれとして線形近似すれば，スピン 2 の場合の方程式が現れる．

ディラック方程式の場合と同様，これらのスピナー場も成分ごとにクライン–ゴルドン方程式を満たす．実際，第 1 の方程式に $\partial_{b\dot{a}}$，第 2 の方程式に $\partial_{a\dot{b}}$ を作用させ，一般的に成り立つ関係式

$$\partial_{b\dot{a}}\partial^{a\dot{a}} = \frac{1}{2}\Box\delta^a_b, \quad \partial_{a\dot{b}}\partial^{a\dot{a}} = \frac{1}{2}\Box\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \tag{1.92}$$

(δ^a_b, $\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}}$ は数値的には通常のクロネッカー記号 δ_{ab}, $\delta_{\dot{a}\dot{b}}$ と同じものである）を適用すれば，クライン–ゴルドン方程式

$$\Box\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} = 0, \quad \Box\phi_{a_1\cdots a_{2s}} = 0$$

が従う．

これらの方程式の解をツイスター理論に基づいて記述することは第 2 章に回して，ここでは方程式の対称性について考える．これらの方程式が相対論的場の方程式として並進やローレンツ変換に対して不変であること（場も同時に変換するのでむしろ共変というべきであるが）は言うまでもないが，これらの方程式のもう一つの際だった特徴は共形変換についても不変性をもつことである．

これは対応する粒子が無質量であることの一つの顕れである．もともと共形変換は光円錐（したがって無質量粒子）と密接な関係がある．また，クライン–ゴルドン方程式やディラック方程式に対して共形変換の特別な場合である座標の引き延ばし $x^\mu \to ax^\mu$ を行うと質量が $m \to a^{-1}m$ と変化するので，方程式が引き延ばしに対して不変であるのは $m=0$ の場合だけである．

i) ローレンツ変換に関する共変性

上の自由場の方程式が並進に関して不変なのは明らかなので，ここではローレンツ変換（正確に言えば $h \in \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ による座標変換 $x \to x' = hxh^*$）に対する共変性を確かめよう．$x, x', h, \bar{h}$ の行列要素 $x^{a\dot{a}}$, $x'^{a\dot{a}}$, $h^a{}_b$, $\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$ を用いれば座標変換は

$$x'^{a\dot{a}} = h^a{}_b \bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} x^{b\dot{b}}$$

となる．これから方向微分 $\partial_{a\dot{a}} = \partial/\partial x^{a\dot{a}}$ と $\partial'_{a\dot{a}} = \partial/\partial x'^{a\dot{a}}$ の間の線形関係

$$\partial_{b\dot{b}} = \frac{\partial x'^{a\dot{a}}}{\partial x^{b\dot{b}}} \partial'_{b\dot{b}} = h^a{}_b \bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \partial'_{a\dot{a}}$$

がわかる．ここでスピナー添字を上げ下げし，${}^{\mathrm{t}}h^{-1}$, ${}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1}$ の行列要素 $H_a{}^b$, $\bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{a}}$ と $h^a{}_b$, $\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$ の関係を思い出せば，

$$\partial^{b\dot{b}} = H_a{}^b \bar{H}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \partial'^{a\dot{a}} \tag{1.93}$$

という線形関係式が得られる．したがって，座標変換 $x \to x'$ に伴ってスピナー場の成分を（文字どおりスピナーとして）

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} \to \psi'_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} = \bar{H}_{\dot{a}_1}{}^{\dot{b}_1} \cdots \bar{H}_{\dot{a}_{2s}}{}^{\dot{b}_{2s}} \psi_{\dot{b}_1\cdots\dot{b}_{2s}}, \tag{1.94}$$

$$\phi_{a_1\cdots a_{2s}} \to \phi'_{a_1\cdots a_{2s}} = H_{a_1}{}^{b_1} \cdots H_{a_{2s}}{}^{b_{2s}} \phi_{b_1\cdots b_{2s}} \tag{1.95}$$

と変換すれば自由場の方程式は不変に保たれる．

ii) 引き延ばしに関する共変性

時空座標の引き延ばし

$$x^{a\dot{a}} \ \to \ x'^{a\dot{a}} = c^2 x^{a\dot{a}} \quad (c \neq 0)$$

に対して方向微分は

$$\partial_{a\dot{a}} \ \to \ \partial'_{a\dot{a}} = c^{-2}\partial_{a\dot{a}} \tag{1.96}$$

と変換する．これは明らかに上の自由場方程式を不変に保つが，$s = 0, 1/2, 1$ の場合の作用汎函数に基づく場の理論的次元解析の観点から見れば，スピナー場も

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} \to \psi'_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} = c^{-2-2s}\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}, \tag{1.97}$$

$$\phi_{a_1\cdots a_{2s}} \to \phi'_{a_1\cdots a_{2s}} = c^{-2-2s}\phi_{a_1\cdots c_{2s}} \tag{1.98}$$

とスケール変換すると考えるのが自然である．

iii) 反転に関する共変性

反転に関する共変性を見るには反転を

$$x \ \to \ x' = -hx^{-1}h^*, \quad h \in \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C}), \tag{1.99}$$

という形に一般化しておく方が都合が良い．第一に，この方がスピナー添字の取扱いに曖昧さが生じない．第二に，ツイスター理論の言葉で反転を解釈する際にこの一般化された形の反転が自然に現れるからである．h は x の場合と同様に混合スピナーの成分を並べた行列

$$h = (h^{a\dot{a}})_{a=0,1;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}}$$

であると考える．x' と x を結ぶ式を微分すれば

$$dx' = hx^{-1}dxx^{-1}h^*$$

となるから，計量を x と x' で見るときの関係は

$$\det(dx') = \det(h)\det(h^*)\det(x)^{-2}\det(dx) \tag{1.100}$$

となる．特に，上の座標変換が確かに共形写像であることがわかる．

方向微分 $\partial_{a\dot{a}}, \partial'_{a\dot{a}}$ の間の線形関係を求めておこう．上の dx' と dx の間の線形関係を dx について解けば

$$dx = xh^{-1}dx'h^{*-1}x$$

となる．${}^{\mathrm{t}}h^{-1}$ と ${}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1} = h^{*-1}$ の行列要素を

$$ {}^{\mathrm{t}}h^{-1} = (H_{a\dot{a}})_{a=0,1(\downarrow);\dot{a}=\dot{0},\dot{1}(\rightarrow)}, \quad {}^{\mathrm{t}}\bar{h}^{-1} = (\bar{H}_{\dot{a}a})_{\dot{a}=\dot{0},\dot{1}(\downarrow);a=0,1(\rightarrow)} \tag{1.101} $$

と定義すれば，dx と dx' の間の線形関係式はスピナーの成分を用いて

$$ dx^{c\dot{c}} = x^{c\dot{b}} H_{a\dot{b}} \bar{H}_{\dot{a}b} x^{b\dot{c}} dx'^{a\dot{a}} $$

という形に書き直せる．これから方向微分の線形関係

$$ \partial'_{a\dot{a}} = x^{c\dot{b}} H_{a\dot{b}} \bar{H}_{\dot{a}b} x^{b\dot{c}} \partial_{c\dot{c}} $$

がわかる．ここで，さらに添字を上げ下げすれば，最終的に

$$ \partial'^{a\dot{a}} = x_{c\dot{b}} H^{a\dot{b}} \bar{H}^{\dot{a}b} x_{b\dot{c}} \partial^{c\dot{c}} \tag{1.102} $$

という線形関係が得られる．

以上のことに基づいて次のことが示せる．

定理 1.1 座標変換 $x \to x' = -hx^{-1}h^*$ に伴ってスピナー場を

$$ \psi'_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} = (\det x)\bar{h}_{\dot{a}_1 b_1} \cdots \bar{h}_{\dot{a}_{2s} b_{2s}} x^{b_1\dot{c}_1} \cdots x^{b_{2s}\dot{c}_{2s}} \psi_{\dot{c}_1\cdots\dot{c}_{2s}}, \tag{1.103} $$

$$ \phi'_{a_1\cdots a_{2s}} = (\det x) h_{a_1\dot{c}_1} \cdots h_{a_{2s}\dot{c}_{2s}} x^{b_1\dot{c}_1} \cdots x^{b_{2s}\dot{c}_{2s}} \phi_{b_1\cdots b_{2s}} \tag{1.104} $$

と変換すれば無質量自由場の方程式は不変に保たれる．

証明（概略） $\phi_{a_1\cdots a_{2s}}$ についても証明は同様なので，$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}$ についてのみ説明する．定理の主張する変換公式に対して上で求めた $\partial'^{a\dot{a}}$ の表示式を適用して $\partial'^{a\dot{a}_1}\psi'_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}$ を計算し，それがゼロになることを示せばよい．ライプニッツ則を用いて微分演算子の作用を計算し，

$$ \partial^{c\dot{c}} x^{b\dot{b}} = \epsilon^{cb}\epsilon^{\dot{c}\dot{b}}, \quad \partial^{c\dot{c}} \det x = x^{c\dot{c}} $$

などの等式を用いて結果を整理すれば，

$$ \partial'^{a\dot{a}_1}\psi'_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}} = A + B + C $$

という表示が得られる．ここで A, B, C は

$$ A = x_{c\dot{b}} H^{a\dot{b}} \bar{H}^{\dot{a}_1 b} x_{b\dot{c}} x^{c\dot{c}} \bar{h}_{\dot{a}_1 b_1} \cdots \bar{h}_{\dot{a}_{2s} b_{2s}} x^{b_1\dot{c}_1} \cdots x^{b_{2s}\dot{c}_{2s}} \psi_{\dot{c}_1\cdots\dot{c}_{2s}}, $$

$$ \begin{aligned} B = {} & x_{c\dot{b}} H^{a\dot{b}} \bar{H}^{\dot{a}_1 b} x_{b\dot{c}} (\det x) \bar{h}_{\dot{a}_1 b_1} \cdots \bar{h}_{\dot{a}_{2s} b_{2s}} (\epsilon^{cb_1}\epsilon^{\dot{c}\dot{c}_1} x^{b_2\dot{c}_2} \cdots x^{b_{2s}\dot{c}_{2s}} + \cdots \\ & + x^{b_1\dot{c}_1} \cdots x^{b_{2s-1}\dot{c}_{2s-1}} \epsilon^{cb_{2s}}\epsilon^{\dot{c}\dot{c}_{2s}}) \psi_{\dot{c}_1\cdots\dot{c}_{2s}}, \end{aligned} $$

$$ C = x_{c\dot{b}} H^{a\dot{b}} \bar{H}^{\dot{a}_1 b} x_{b\dot{c}} (\det x) \bar{h}_{\dot{a}_1 b_1} \cdots \bar{h}_{\dot{a}_{2s} b_{2s}} x^{b_1\dot{c}_1} \cdots x^{b_{2s}\dot{c}_{2s}} \partial^{c\dot{c}_1} \psi_{\dot{c}_1\cdots\dot{c}_{2s}} $$

という量である.

$$x_{b\dot{c}}x^{c\dot{c}} = (\det x)\delta^c_b, \quad x_{b\dot{b}}x^{b\dot{c}} = (\det x)\delta^{\dot{c}}_{\dot{b}}, \quad \bar{H}^{\dot{a}b}\bar{h}_{\dot{a}c} = \delta^b_c$$

などの等式を用いて A, B, C を計算すれば $A + B = 0$ ならびに

$$C = x_{c\dot{b}}H^{a\dot{b}}(\det x)^2\bar{h}_{\dot{a}_2b_2}\cdots\bar{h}_{\dot{a}_{2s}b_{2s}}x^{b_2\dot{c}_2}\cdots x^{b_{2s}\dot{c}_{2s}}\partial^{c\dot{c}_1}\psi_{\dot{c}_1\cdots\dot{c}_{2s}}$$

が成り立つことがわかる. したがって, $\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}$ が x について自由場の方程式を満たせば $C = 0$ となって, $\psi'_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}$ も x' について自由場の方程式を満たすことがわかる. □

覚え書き

1. 相対論に関しては和書も含めて数多くの解説書があるが, 内山の教科書 [110] は特殊相対論と一般相対論の両面を基礎から平明に解説している好著である. 同じ内山による一般相対論の教科書 [111] は一般相対論のより専門的な内容を紹介している. この著書はスピナー算法とその一般相対論的時空の局所的分類への応用 (ペンローズによる) について詳しく説明している点でも特色がある. ただし, いずれの著書でも $\eta_{\mu\nu}$ が逆符号になっている ($\eta_{00} = -1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, 他の成分は 0 に等しい) ので注意が必要である.
2. 量子力学や場の理論に関しても数多くの解説書があるが, 九後の教科書 [113] は相対論的量子力学や場の理論のさまざまな側面に目配りが行き届いている. ただし, この著書では場の方程式というものはほとんど登場しない (ラグランジアンと作用汎函数がすべてである). 物理学におけるスピンの理論の歴史は朝永の有名な連載記事 [118] を通じて知ることができる.
3. スピンを純粋に数学的な対象として追求するならば, カウフマンの著書 [48] にも紹介されているスピンネットワーク (spin network) が興味深い題材の一つと言えるだろう. スピンネットワークはペンローズが 1960 年代末に時空幾何学の組合せ的模型として考え出したもので, 近年, 量子重力理論などの観点から新たな関心を呼んでいる. たとえばスモーリン [82] や小玉 [114] の解説を参照されたい.
4. ミンコフスキー時空の共形コンパクト化 $\boldsymbol{M}^{\#}$ についてはハゲットとトッドの著書 [42] に入門的な解説がある. 第 2 章で紹介する複素グラスマン多様体 (あるいはその複素射影空間への埋め込み) を利用して共形コンパクト化をより具体的に記述することもできる. 共形群の意味もそれによって明らかになる. また, ペン

ローズとリンドラーの2巻本の第2巻 [76] は一般相対論の時空の場合も含めて共形コンパクト化をさまざまな側面から詳細に論じている．

5. スピナー形式の場の方程式についてのまとまった解説は多くない．ペンローズとマッカラムの論文 [74] にも簡単な解説があるが，最も詳しい文献はペンローズとリンドラーの2巻本の第1巻 [75] であろう．そこではスピナー算法に基づく相対論的場の方程式や時空幾何学の定式化が詳細に紹介されている．これらの文献で用いられている記法は一種独特のものであり，慣れないうちは非常にわかりにくい．

6. ペンローズの65歳を記念して開催されたシンポジウムの報告集 [41] には微分幾何学・位相幾何学から量子観測理論・量子重力理論に到るまで多彩な内容の論文が収録されている．また，本書執筆中に出版されたペンローズの最新の著書 [73] は，一般の読者から数学や物理学の専門家までを対象に，独自の観点から現代物理学の世界像を紹介している（ハードカバーで1000ページを超える大作である）．そこでは，ペンローズ自身の研究テーマである一般相対論・量子観測理論の諸問題も含めて，数学や物理学の基本的諸概念から超弦理論・ループ量子重力理論・ツイスター理論に到るまで幅広い話題が取り上げられている．

7. ツイスターに関する多くの文献では，複素座標の行列 $x = (x^{a\dot{a}})$ をミンコフスキー時空において

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^3 - ix^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & z \\ \bar{z} & v \end{pmatrix}$$

というように，またユークリッド時空において

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ -\bar{z} & \bar{y} \end{pmatrix}$$

というように定めることが多い（x^0, x^3 と x^1, x^2 が入れ替わっていることもある）．これは要するに x の第1行を基本的なものと見なす定義である．本書ではこれとは対照的に第1列を基本的なものと見なす定義を採用したので，他の文献と読み比べる際には注意されたい．

第2章

ツイスター誕生

スピンの理論は相対論において複素数が果たす役割を考えるための良い題材ではあるが，スピンはそもそも素粒子の内部自由度に関わるものであるから，時空幾何学を記述するという目的のためには新たなアイディアが必要になる．そこでペンローズはミンコフスキー時空における無質量粒子の世界線（ナル直線）が一対のスピナー（双スピナー）をデータとして決まることに注目した．この双スピナーはナルツイスターと名づけられ，それが棲む空間としてツイスター空間が導入された [66]．ツイスター空間は 3 次元複素射影空間と同型な複素多様体であり，その中でナルツイスターは実余次元 1 の部分集合をなす．ツイスター空間自体はミンコフスキー時空の複素化（複素時空）と多対多の対応で結ばれることがわかるが，この対応は古典的な代数幾何学でクライン対応と呼ばれるものに他ならない．それによって時空多様体の自然なコンパクト化の仕方も同時にわかる．ペンローズはこの幾何学的対応に基づいて無質量自由場の方程式の解の積分表示を与えた [67, 68]．この積分表示は自由場をツイスター空間上の複素幾何学的データ（正則函数あるいはコホモロジー類）によって表示するものであり，ツイスターが時空幾何学のみならず場のレベルにおいても有用な概念であることを示している．これがその後に続くツイスター理論のさまざまな研究の出発点になった．

この章では，ペンローズがたどった道筋に従いながら，ツイスターの概念の導入からクライン対応を経て無質量自由場の積分表示に到るまでを紹介する．

1　ツイスター誕生の背景

ツイスター（twistor）の概念は，複素数によって時空を記述する，という動機のもとで導入され，最終的にはクライン対応という純幾何学的な定式化が与えら

れた．したがって天下り的にクライン対応から話を始めてもよいのだが，ここではツイスター理論の誕生に先立って1960年代初頭にロビンソン（I. Robinson）とカー（R.P. Kerr）が行ったある種の微分方程式に関する研究から話を始めたい．ペンローズが最初の論文 [66] で触れているように，その中にはツイスターの概念の先駆けと言うべき内容が含まれているからである．

ロビンソンはマクスウェル方程式の付加条件 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$, $\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} = 0$ を満たす解を考察し，それが無剪断条件（shear-free condition）[†1]と呼ばれる微分方程式

$$n^{\dot{a}} n^{b} \partial_{b\dot{b}} n_{\dot{a}} = 0 \tag{2.1}$$

の解（補助スピナー場）$n_{\dot{a}}$ によって構成できるということ（ロビンソンの定理）を示した．この方程式は任意函数 $f(x)$ によるゲージ変換 $n_{\dot{a}} \to e^{f(x)} n_{\dot{a}}$ によって形が保たれるので，$n_{\dot{0}}$ がゼロでないところでは $n_{\dot{a}}$ を

$$n_{\dot{0}} = 1, \quad n_{\dot{1}} = \zeta$$

と正規化すること（あるいは，同じことだが，$\zeta = n_{\dot{1}}/n_{\dot{0}}$ を新たな従属変数とすること）によって ζ に対する微分方程式

$$(\zeta\partial_{0\dot{0}} - \partial_{0\dot{1}})\zeta = 0, \quad (\zeta\partial_{1\dot{0}} - \partial_{1\dot{1}})\zeta = 0 \tag{2.2}$$

に還元できる．

カーはアインシュタイン方程式の特殊解の構成に関連してこの無剪断条件の方程式を取り上げて，それが3変数の任意函数 $g(w^0, w^1, \zeta)$ を用いて書かれた方程式

$$g(x^{0\dot{0}} + x^{0\dot{1}}\zeta, x^{1\dot{0}} + x^{1\dot{1}}\zeta, \zeta) = 0 \tag{2.3}$$

（もはや微分方程式ではないことに注意されたい）に帰着するということ（カーの定理）を示した．無剪断方程式の解はこれを解くことによって得られる（解の存在は陰函数定理によって保証される）．ここにツイスターの原型が見えて

[†1] 無剪断（shear-free）という言葉は $n_{\dot{a}}$ から後述のように定まる接ベクター場 v の無限小変換としての特徴を連続体力学との類似で言い表したものである．詳しくは参考文献 [42, 76] を参照されたい．

いる．すなわち，(w^0, w^1, ζ) という三つの量はツイスター空間の非斉次座標であり，$g(w^0, w^1, \zeta)$ はツイスター空間上の函数と見なせる．そこに

$$w^a = x^{a\dot{0}} + x^{a\dot{1}}\zeta \tag{2.4}$$

を代入したものが上の方程式の左辺であるが，後に示すようにこの (2.4) はツイスター座標と時空座標を結ぶ関係式に他ならない．要するに，無剪断条件の方程式の解はツイスター空間の中の超曲面に対応する．ペンローズはツイスターの応用の一つとしてカーの定理をこのような形に解釈したのである．

ちなみに，無剪断条件を満たすスピナー場 $n_{\dot{a}}$ から $v^{a\dot{a}}$ を

$$v^{a\dot{a}} = \bar{n}^a n^{\dot{a}}$$

（$\bar{n}^a$ は $n^{\dot{a}}$ の複素共役を表す）と定めれば，各点でナルな接ベクター場 $v = v^{a\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$ が得られる．これが零点をもたない領域では，その積分曲線族によって1次元葉層構造ができる．これは相対論の研究において無剪断ナル叢（shear-free null congruence）[†2]と呼ばれるもので，物理的にはロビンソンの定理によって定まる電磁場の電磁放射の流れと解釈される．特にロビンソン叢（Robinson congruence）と呼ばれる特殊な無剪断ナル叢の場合には，v を同時刻面に射影して3次元空間の1次元葉層構造として可視化することによって，トーラスによるホップファイバー構造（Hopf fibering）ならびに各トーラス上を走る流線の構造が現れる（図 2.1）．各流線は実際には円周であり，トーラスに接しながら1回巻き付いている．また，流線同士も互いに一重に絡み合っていて，ホップ絡み目（Hopf link）と呼ばれる絡み目と同じ位置関係にある．ツイスター（twistor）というペンローズの造語の由来はこのこのねじれた（twisted）流線の状況に由来する[†3]．

[†2]叢（congruence）とは，空間内の曲線・曲面などの族であって，空間の各点に対してそれを通る族の要素がちょうど一つ存在するものを意味する．葉の次元が一定の葉層構造はその例である．

[†3]もちろん，語尾からもわかるように，ベクター（vector），テンサー（tensor），スピナー（spinor）と並ぶものとしての命名でもある．

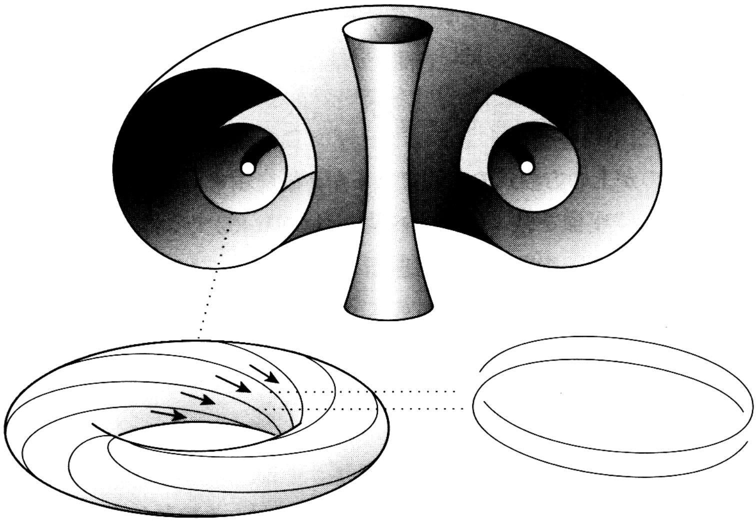


図 2.1 ホップファイバー構造の断面図とトーラス上の流線の状況．流線はいずれもトーラスに接して1回巻きつく円周である．流線同士は互いに絡み合ってホップ絡み目をなしている．

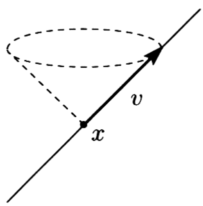


図 2.2 ナル直線上の点と接ベクター

2 ナル直線とナルツイスター

ミンコフスキー時空 $\boldsymbol{M}$ の中のナル直線 γ を考える．γ を指定するにはその上の1点 x とゼロでない接ベクター v を与えればよいが（図 2.2），この対 (x, v) は γ を指定するデータとして大きな無駄を含んでいる．特に x として γ のどの点を選んでもよいことが問題である（v の任意性はスカラー倍に限られるからあまり問題にならない）．このような無駄を含まないデータの選び方と

してペンローズはナルツイスターの概念を導入する．

γ に対するナルツイスターを定義するために，まず接ベクター v の成分をスピナー $v^{a\dot{a}}$ で表す．ナルであることは

$$\det(v^{a\dot{a}})_{a=0,1;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} = \frac{1}{2}v_{a\dot{a}}v^{a\dot{a}} = 0$$

を意味するから，$(v^{a\dot{a}})$ は 2×2 行列として階数 1 であり，したがってその行列要素は一対のスピナー $\tilde{\lambda}^a$, $\lambda^{\dot{a}}$ によって $v^{a\dot{a}} = \tilde{\lambda}^a\lambda^{\dot{a}}$ という形に書ける．さらに $v^{a\dot{a}}$ のエルミート性によって $\tilde{\lambda}^a$ が $\lambda^{\dot{a}}$ の複素共役 $\bar{\lambda}^a$ のスカラー倍であることがわかる．必要ならばこれらのスピナーをスカラー倍して定義し直すことによって，一般性を失うことなく $\tilde{\lambda}^a = \bar{\lambda}^a$ と仮定してよい．こうして $v^{a\dot{a}}$ が

$$v^{a\dot{a}} = \bar{\lambda}^a\lambda^{\dot{a}}, \quad \lambda = (\lambda_{\dot{a}}) \in \boldsymbol{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{2.5}$$

という形に表せることがわかった[†4]．λ は γ に対して $\lambda \to c\lambda$, $c \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$, という任意性を除いて一意的に決まる．言い換えれば，γ の接方向から複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$ の点 $[\lambda]$ が決まる．

こうして γ の接方向が λ というスピナーで記述できたので，次に γ の位置情報を記述する量を取り出す．γ の任意の 2 点 $x = (x^{a\dot{a}})$, $x' = (x'^{a\dot{a}})$ を考えよう．これらの座標の差はある実数 r によって

$$x'^{a\dot{a}} - x^{a\dot{a}} = rv^{a\dot{a}} = r\bar{\lambda}^a\lambda^{\dot{a}}$$

と表せる．両辺を $\lambda_{\dot{a}}$ と縮約すれば，右辺は恒等式 $\lambda^{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0$ によってゼロとなるので，

$$(x'^{a\dot{a}} - x^{a\dot{a}})\lambda_{\dot{a}} = 0$$

という等式が得られる．これは $x^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ が γ 上の点 x の選び方によらず γ（および λ）のみによって決まる量であることを示している．この量に i を乗じたものを μ^a とおけば，γ の任意の点 x に対して

$$\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} \tag{2.6}$$

という等式が成立することになる．その複素共役を考えれば，$x = (x^{a\dot{a}})$ のエ

[†4] 以後 $\mathbf{0}$（太字のゼロ）はゼロスピナーあるいはゼロベクターを表す．

ルミート性 $\bar{x}^{\dot{a}a} = x^{a\dot{a}}$ によって

$$\bar{\mu}^a = -i\bar{\lambda}_a x^{a\dot{a}} \tag{2.7}$$

という等式も成立する．

こうして得られた一対のスピナー $\lambda = (\lambda_{\dot{a}})$, $\mu = (\mu^a)$ を 4 成分量（すなわち双スピナー）に組んだもの

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu^0 \\ \mu^1 \\ \lambda_{\dot{0}} \\ \lambda_{\dot{1}} \end{pmatrix}$$

を γ に対するナルツイスター（null twistor）と呼ぶ．構成法から ξ は γ に対してスカラー倍 $\xi \to c\xi$ の任意性を除いて決まる．すなわち，γ に対して決まるのは ξ そのものではなくて，$\xi \sim c\xi$, $c \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, という同値関係に関する同値類，すなわち 3 次元射影空間 $\mathbf{CP}^3$ の点 $[\xi]$ である．ただしそれは $\mathbf{CP}^3$ の一般の点ではない．実際，(2.6) と (2.7) から γ の任意の点 x に対して

$$\bar{\lambda}_a \mu^a = i\bar{\lambda}_a x^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} = -\bar{\mu}^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}$$

という等式が成立する．したがってナルツイスターの成分は

$$\xi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi = \bar{\lambda}_a \mu^a + \bar{\mu}^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} = 0 \tag{2.8}$$

という代数的条件を満たす（左辺の 0, 1 は 2×2 のゼロ行列と単位行列を表す）．逆に，次に示すように，この条件を満たす $[\xi] \in \mathbf{CP}^3$ はナル直線を定める．

定理 2.1　$\mathbf{CP}^3$ の点 $[\xi]$ で条件 $\lambda \neq \mathbf{0}$ および (2.8) を満たすものが与えられれば

$$\gamma = \{x \in \boldsymbol{M} \mid \mu^a = i x^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}\} \tag{2.9}$$

はナル直線である．そのナルツイスターはスカラー倍を除いて ξ に一致する．

証明　γ が空ではないことを示せばよい．実際，γ は連立 1 次方程式で定義されているから，空でなければ $\boldsymbol{M}$ の線形部分多様体であり，その任意の点での接ベクター v の成分 $v^{a\dot{a}}$ は $v^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0$ と $\bar{\lambda}_a v^{a\dot{a}} = 0$ を満たすので $\bar{\lambda}^a \lambda^{\dot{a}}$ のスカラー倍になる．これは γ がナル直線であることを意味する．そこで γ が「基準点」と呼ぶべき 1 点を含むことを二つの場合に分けて示そう．

1. $\bar{\lambda}_a \mu^a \neq 0$ の場合：(2.8) によって

$$\mu^a \bar{\mu}^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} = -\mu^a \bar{\lambda}_b \mu^b$$

という等式が成立するので

$$x^{a\dot{a}} = i\frac{\mu^a \bar{\mu}^{\dot{a}}}{\bar{\lambda}_b \mu^b}$$

が (2.6) を満たす基準点を与える．ちなみに，これは原点を頂点とする光円錐が γ と交差する点に他ならない．そのような点は今の場合 1 点に限られる．

2. $\bar{\lambda}_a \mu^a = 0$ の場合：$\lambda \neq \mathbf{0}$ であるから μ^a は $\bar{\lambda}^a$ のスカラー倍に等しい．すなわち

$$\mu^a = c\bar{\lambda}^a$$

となる．そこで，補助的なスピナー $\kappa^{\dot{a}}$ を導入して，問題の基準点を

$$x^{a\dot{a}} = \bar{\lambda}^a \kappa^{\dot{a}} + \bar{\kappa}^a \lambda^{\dot{a}}$$

という形で求めることを考える．これを (2.6) に代入すれば $\mu^a = i\bar{\lambda}^a \kappa^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}$ という等式が得られるので，$\kappa^{\dot{a}}$ に対して

$$c = i\kappa^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}$$

という等式が成立すればよい．$\lambda \neq \mathbf{0}$ であるから c に対してそのように $\kappa^{\dot{a}}$ を選ぶことは必ずできる．

□

こうしてナル直線 $\gamma \subset \boldsymbol{M}$ がナルツイスター $[\xi] \in \mathbf{CP}^3$ によって無駄なく指定できることが確かめられた[†5]．ナルツイスターの特徴づけに現れたエルミー

[†5]要するに，代数幾何学の用語で言えば，ナルツイスターはナル直線族のモジュライ（moduli）である

ト形式

$$\varPhi(\xi) = \xi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi = \bar{\lambda}_a \mu^a + \bar{\mu}^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} \tag{2.10}$$

は $(++--)$ 型の符号をもち，ナルツイスターの定義のみならずミンコフスキー時空のツイスター理論全般において要の役割を演じる．

3 ツイスター空間

ナルツイスターの定式化で出会った 3 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^3$ がツイスター空間（twistor space）である．ペンローズは射影化をする前の双スピナーからなる 4 次元線形空間 $\boldsymbol{C}^4$ も重要なものと考えて $\boldsymbol{T}$ という記号で表し，それをツイスター空間と呼ぶ一方で，その射影化 $\mathbf{PT}$ を射影的ツイスター空間（projective twistor space）と名づけた：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}^4, \quad \mathbf{PT} = \mathbf{CP}^3$$

ここでは $\mathbf{PT}$ をツイスター空間，$\boldsymbol{T}$ を線形ツイスター空間と呼ぶことにする．この他に別種のツイスター空間として双対ツイスター空間 $\mathbf{PT}^*$ とアンビツイスター空間 $\mathbf{AT}$ を導入する．

3.1 一般のツイスターの解釈

ミンコフスキー空間のナル直線は $\lambda \neq \mathbf{0}$ という条件を満たすナルツイスターに対応する．後の議論でわかるように，$\lambda \neq \mathbf{0}$ は $\boldsymbol{M}$ の無限遠点を考えないために生じる条件にすぎない．そこで，$\lambda = \mathbf{0}$ の場合も含めて，$\mathbf{PT}$ の要素で (2.8) を満たすものを一般にナルツイスターと呼び，その全体からなる部分集合を

$$\mathbf{PN} = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \varPhi(\xi) = 0\} \tag{2.11}$$

という記号で表す．

それでは $\mathbf{PT}$ の一般の点はどのように解釈されるだろうか．一つの自然な考え方は，一般の $[\xi] \in \mathbf{PT}$ の場合にも (2.6) を $x = (x^{a\dot{a}})$ に関する方程式と見なして，それが定める集合をナル直線の代わりに扱う，というものであろう．

ここで問題なのは，ξ がナルツイスターでない限り (2.6) を満たすミンコフスキー時空 $\boldsymbol{M}$ の点（言い換えればエルミート行列 x）は存在しない，ということである（そのような $\boldsymbol{M}$ の点があれば，前の議論によって $\Phi(\xi)=0$ が成り立つので，ξ はナルツイスターでなければならない）．そこで，ペンローズに従って，一般の $[\xi]\in\mathbf{PT}$ に対しては (2.6) を複素時空（complex space-time）すなわち $\boldsymbol{M}$ の複素化

$$\mathbf{CM}=\boldsymbol{C}^4=\{x\mid x=(x^{a\dot{a}}),\ x^{a\dot{a}}\in\boldsymbol{C}\} \tag{2.12}$$

における方程式と考え直す．この複素時空における (2.6) の解集合（これは $\boldsymbol{C}^2$ に同型な 2 次元複素多様体となる）を $\alpha_{[\xi]}$ という記号で表し，α 平面 (α plane) と呼ぶ．要するに $[\xi]$ の定める α 平面とは

$$\alpha_{[\xi]}=\{x\in\mathbf{CM}\mid\mu^a=ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}\} \tag{2.13}$$

であり，これがナル直線の代替物となる．ナル直線自体はミンコフスキー時空との交差集合 $\alpha_{[\xi]}\cap\boldsymbol{M}$（$[\xi]\in\mathbf{PN}$ ならば空でない）として復元される．

$\boldsymbol{M}$ の計量 ds^2 を $\mathbf{CM}$ の正則接束上の非退化正則 2 次形式に拡張したものを同じ記号 ds^2 で表して複素計量（complex metric）と呼ぶことにする[†6]．$\alpha_{[\xi]}$ は次のような幾何学的特徴をもつ．このことを「α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ は全ナル（totally null）である」という．

定理 2.2　$\alpha_{[\xi]}$ の各点 x における任意の接ベクター $v\in T_x\alpha_{[\xi]}$ は複素計量 ds^2 に関してナル，すなわち

$$ds^2(v)=2\det(v^{a\dot{a}})=0$$

という等式を満たす．さらにもう一つの接ベクター $v'\in T_x\alpha_{[\xi]}$ を任意に与えるとき

$$ds^2(v,v')=\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}v^{a\dot{a}}v'^{b\dot{b}}=0$$

という等式が成立する．

[†6] これはツイスター理論でしばしば用いられる用語であるが，ケーラー計量などと紛らわしいので，混同しないように注意されたい．

証明 v が $\alpha_{[\xi]}$ の接ベクターならば，その成分 $v^{a\dot{a}}$ は $v^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}=0$ という等式を満たすので，ある κ^a を用いて $v^{a\dot{a}}=\kappa^a\lambda^{\dot{a}}$ という形に表せる．これからただちに $\det(v^{a\dot{a}})=0$ が従う．もう一つの接ベクター v' の成分 $v'^{a\dot{a}}$ も同様に $v'^{a\dot{a}}=\kappa'^a\lambda^{\dot{a}}$ と表せる．これらを $ds^2(v,v')$ の定義式に代入すると

$$ds^2(v,v')=\kappa_a\kappa'^a\lambda_{\dot{a}}\lambda^{\dot{a}}=0$$

となる．□

3.2 双対ツイスター空間およびアンビツイスター空間

(2.7) に基づくナル直線の代替物を考えることもできる．ただし，文字どおりにそれを行えば複素共役 $\bar{\lambda}_a$, $\bar{\mu}^{\dot{a}}$ を変数とすることになって不都合なので，新たにスピナーの対 $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_a)$, $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}^{\dot{a}})$ を導入して，双スピナー

$$\eta=(\tilde{\lambda}_0\ \tilde{\lambda}_1\ \tilde{\mu}^{\dot{0}}\ \tilde{\mu}^{\dot{1}})$$

によって決まる **CM** の部分多様体

$$\beta_{[\eta]}=\{x\in\mathbf{CM}\mid\tilde{\mu}^{\dot{a}}=-i\tilde{\lambda}_a x^{a\dot{a}}\}\tag{2.14}$$

を考える（$[\eta]$ は $\eta\in\boldsymbol{C}^4\setminus\{\mathbf{0}\}$ の定める $\mathbf{CP}^3$ の点を表す）．これを β 平面 (β plane) と呼ぶ．α 平面の場合と同様の議論によって β 平面も **CM** の中で全ナルな 2 次元複素部分多様体であることがわかる．

η の属する線形空間 $\boldsymbol{C}^4$ を

$$\langle\eta,\xi\rangle=\tilde{\lambda}_a\mu^a+\tilde{\mu}^{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}\tag{2.15}$$

というペアリングによって $\boldsymbol{T}$ の双対空間 $\boldsymbol{T}^*$ と見なすことにしよう．その射影化 $\mathbf{PT}^*$ を双対ツイスター空間 (dual twistor space) と呼ぶ．β 平面はこの双対ツイスター空間の点すなわち双対ツイスターによって指定されるわけである．

上で導入したペアリング $\langle\eta,\xi\rangle$ がナルツイスターの定義に登場したエルミート形式 $\Phi(\xi)$ の複素化になっていることに注意しよう．ツイスター ξ がナル直線に対応するのは $\Phi(\xi)=0$ という条件を満たす場合だったが，同様の意味で次のことが成立する（証明はナル直線の場合と同様なので省略する）．

定理 2.3

$$\langle \eta, \xi \rangle = 0 \iff \alpha_{[\xi]} \cap \beta_{[\eta]} \neq \emptyset \tag{2.16}$$

ここに登場した $\alpha_{[\xi]} \cap \beta_{[\eta]}$ は **CM** 内の複素直線（すなわち $\boldsymbol{C}$ に同型な 1 次元複素部分多様体）である．この複素直線の接ベクター v の成分 $v^{a\dot{a}}$ は

$$v^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} = 0, \quad \tilde{\lambda}_a v^{a\dot{a}} = 0$$

という等式を満たすので $\tilde{\lambda}^a \lambda^{\dot{a}}$ のスカラー倍になる．特に v は複素計量 ds^2 に関してナルである．このように接ベクターがナルであるような **CM** 内の複素直線を複素ナル直線（complex null line）という．この意味で $\alpha_{[\xi]} \cap \beta_{[\eta]}$ は複素ナル直線であるが，逆に任意の複素ナル直線は α 平面と β 平面の交叉として表せる（図 2.3）．このことは次のように少し強い形で説明できる．

定理 2.4　**CM** 内の任意の複素ナル直線 γ に対してそれを通る α 平面と β 平面がただ一つ存在し，γ はそれらの交叉として表せる．

証明　ナル直線からナルツイスターを決めたのと同様の議論による．γ 上の任意の 2 点 $x = (x^{a\dot{a}})$, $x' = (x'^{a\dot{a}})$ を選ぶ．$x - x'$ はナルだから，それを 2×2 行列と見なしたものの行列式はゼロであり，したがって

$$x^{a\dot{a}} - x'^{a\dot{a}} = \tilde{\lambda}^a \lambda^{\dot{a}}$$

と表せる．$\lambda = (\lambda_{\dot{a}})$ と $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_{\dot{a}})$ は $x - x'$ を階数 1 の 2×2 行列と見なしたものに対する右零固有空間および左零固有空間の基底であるから，スカラー倍

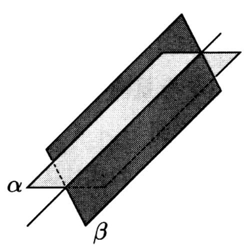


図 2.3　複素ナル直線を α 平面と β 平面の交叉として表す

を除いて一意的に決まる．この等式を $\lambda_{\dot{a}}$ および $\tilde{\lambda}_a$ と縮約すれば

$$(x^{a\dot{a}} - x'^{a\dot{a}})\lambda_{\dot{a}} = 0, \quad \tilde{\lambda}_a(x^{a\dot{a}} - x'^{a\dot{a}}) = 0$$

となるから，$\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ および $\tilde{\mu}^{\dot{a}} = -i\tilde{\lambda}_a x^{a\dot{a}}$ が x の選び方によらない定数として決まる．$\xi = (\mu^a, \lambda_a)$, $\eta = (\tilde{\mu}^{\dot{a}}, \tilde{\lambda}_a)$ と定めれば，$\alpha_{[\xi]}$ と $\beta_{[\eta]}$ はそれぞれ γ を含む α 平面と β 平面であり，以上の議論から γ を含む α 平面と β 平面はこれらに限ることもわかる．□

複素ナル直線に基づいてミンコフスキー時空におけるナルツイスターと同様の議論が展開できる．ここでナルツイスターの集合 **PN** の役割を演じるのは **PT** と **PT*** の直積の中の複素超曲面

$$\mathbf{AT} = \{(\xi, \eta) \in \mathbf{PT} \times \mathbf{PT}^* \mid \langle \eta, \xi \rangle = 0\} \tag{2.17}$$

である．これはアンビツイスター空間（ambi-twistor space）と呼ばれる[†7]．

4 時空の再解釈

ここまでの議論では各種のツイスターが時空の特殊な部分集合に対応するものとして導入された．これは時空から見たツイスターの解釈というべきものである．ここで視点を変えて，各時空点をツイスター空間のある部分集合に対応させることを考える．これはツイスター空間によって時空点（ひいては時空そのもの）の解釈を与えることであり，最終的には時空をグラスマン多様体（の部分集合）として捉え直すことにつながる．

4.1 時空点の解釈

α 平面の定義に用いた式 (2.6) を見直してみる．この式を複素時空 **CM** の部分集合の定義式と見なして α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ を定義したわけだが，今度は時空点 $x \in \mathbf{CM}$ が先に与えられたとして，この式によって定義される **PT** の部分集合

[†7]「アンビ（ambi）」とは，ambiguous, ambivalent などの語に見られるように，両側に分かれていることを意味する接頭語である．一種独特の語感があるので，ここでは敢えて日本語に訳さずに英語の読み方をそのまま残すことにした．

$$\Gamma_x = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}\} \tag{2.18}$$

を考える．次に示すことに基づいて，これを x に対応するツイスター直線 (twistor line) と呼ぶ．

定理 2.5　Γ_x は複素多様体として複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$ に同型である．

証明　Γ_x に属する $[\xi]$ の λ 部分 $\lambda = (\lambda_{\dot{a}})$ は自動的に $\lambda \neq \mathbf{0}$ という条件を満たす．実際，$\lambda = \mathbf{0}$ ならば Γ_x の定義方程式 $\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ から $\mu = \mathbf{0}$ となって $\xi = \mathbf{0}$ が従うが，これはもちろん設定に反する．こうして $\mathbf{CP}^1$ の点 $[\lambda]$ が決まる．$[\xi] \in \Gamma_x$ に $[\lambda] \in \mathbf{CP}^1$ を対応させる写像 $\Gamma_x \to \mathbf{CP}^1$ は正則で全単射であり，複素多様体としての同型を与える．

注意　この結果（および証明）は次のように言い換えることもできる．$\mathbf{PT}$ の開部分集合

$$\mathbf{PT}' = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \lambda \neq \mathbf{0}\} \tag{2.19}$$

すなわち $\mathbf{PT}$ から $\{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \lambda = \mathbf{0}\} \simeq \mathbf{CP}^1$ を除去したものを考える．Γ_x はこの中に含まれている．正則写像

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbf{PT}' & \to & \mathbf{CP}^1 \\ {[\xi]} & \mapsto & [\lambda] \end{array} \tag{2.20}$$

を Γ_x に制限したもの $\pi|_{\Gamma_x} : \Gamma_x \to \mathbf{CP}^1$ が上の証明に登場した同型写像である．この言換えはグラスマン多様体との関係を見るときの基礎になる．□

こうして，すでに知っている α 平面とツイスターの対応関係

$$\alpha_{[\xi]} \subset \mathbf{CM} \longleftrightarrow [\xi] \in \mathbf{PT}'$$

に加えて，時空点とツイスター直線の対応関係

$$x \in \mathbf{CM} \longleftrightarrow \Gamma_x \subset \mathbf{PT}'$$

が明らかになった（図 2.4）．要するに，ツイスターが α 平面の別名であるように，時空点はツイスター直線と同一視できるのである．ツイスター空間から見れば，時空はツイスター空間内のこれらの複素射影直線全体をラベルづけするモジュライ空間と解釈できる．

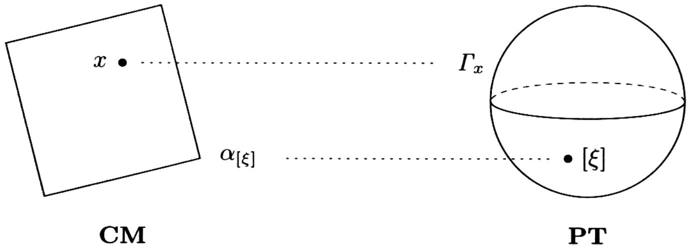


図 2.4 α 平面とツイスター直線

4.2 共形構造の解釈

複素時空 **CM** の各点の接空間には複素計量 ds^2 に関してナルな接ベクターからなる複素光円錐（complex light cone）が決まる．このような構造を実時空の場合にならって共形構造と呼ぶ．今の場合には時空が平坦なので，共形構造を考えることと時空内の複素ナル直線全体を考えることは同等である．以下に示すように，この共形構造もツイスター空間の言葉に翻訳できる．

CM の異なる2点 x, x' に対するツイスター直線 $\Gamma_x, \Gamma_{x'}$ を考える．$\Gamma_x, \Gamma_{x'}$ は **PT** 内の複素射影直線であり，共通部分は高々1点からなる．これらが実際に交差するかどうかが x, x' を通る複素ナル直線の存在と関係している．

定理 2.6

$$x' - x \text{ はナルである} \iff \Gamma_x \cap \Gamma_{x'} \neq \emptyset$$

すなわち x, x' を通る複素ナル直線が存在するための必要十分条件はツイスター直線 $\Gamma_x, \Gamma_{x'}$ が交差することである．

証明 $\Gamma_x \cap \Gamma_{x'} \neq \emptyset$ とする．$[\xi] \in \Gamma_x \cap \Gamma_{x'}$ に対して ξ の成分 $\mu^a, \lambda_{\dot{a}}$ は

$$\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \quad \mu^a = ix'^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$$

という等式を満たす．これから

$$(x'^{a\dot{a}} - x^{a\dot{a}})\lambda_{\dot{a}} = 0$$

が従うが，これは $x' - x$ がナルであることを意味する．逆に $x' - x$ がナルで

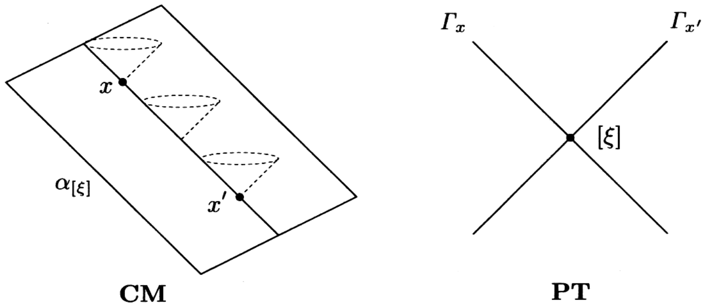


図 2.5　ツイスター直線が交差する場合

あるとする．このとき x, x' を通る直線は複素ナル直線であり，したがって定理 2.4 によってそれを通る α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ が存在する．これは ξ の成分 $\mu^a, \lambda_{\dot{a}}$ に対して $\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ および $\mu^a = ix'^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ という等式が成立することを意味する．これを言い換えれば $[\xi] \in \Gamma_x$ および $[\xi] \in \Gamma_{x'}$ となるので，Γ_x と $\Gamma_{x'}$ が $[\xi]$ で交差することがわかる．

注意　証明を見ればわかるように，定理の主張は「x, x' を通る α 平面が存在するための必要十分条件は $\Gamma_x, \Gamma_{x'}$ が交差することである」と言い換えることもできる．ここに現れる α 平面はツイスター直線の交点 $[\xi]$ に対応する $\alpha_{[\xi]}$ である（図 2.5）．

4.3　グラスマン多様体としての時空

線形ツイスター空間 $\boldsymbol{T}$ の 2 次元複素線形部分空間 $X \subset \boldsymbol{T}$ からなるグラスマン多様体（Grassmann manifold）

$$\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{T}) = \{X \subset \boldsymbol{T} \mid \text{複素線形部分空間},\ \dim X = 2\} \tag{2.21}$$

を導入する．これはコンパクトな 4 次元複素多様体である．この中に複素時空 **CM** が開部分集合として埋め込まれるということを示したい．そこで，上で見た時空点 x とツイスター直線 Γ_x の対応関係に注目する．Γ_x は **PT** の部分集合であるが，対応する線形ツイスター空間 $\boldsymbol{T}$ の部分集合

$$S_x = \{\xi \in \boldsymbol{T} \mid \mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}\} \tag{2.22}$$

は $\boldsymbol{T}$ の 2 次元線形部分空間であるから，$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の点と解釈できる．こうして $x \in \mathbf{CM}$ に $S_x \in \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ を対応させる正則写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CM} & \to & \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T}) \\ x & \mapsto & S_x \end{array}$$

が定まる．

定理 2.7　この写像 $\mathbf{CM} \to \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ は単射である．その像は

$$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})' = \{X \in \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T}) \mid \pi|_X : X \to \boldsymbol{C}^2 \text{ は線形同型}\} \tag{2.23}$$

に一致する．ここで π は ξ にその λ 部分を対応させる線形写像

$$\begin{array}{ccc} \pi : \boldsymbol{T} & \to & \boldsymbol{C}^2 \\ \xi & \mapsto & \lambda \end{array} \tag{2.24}$$

を表す．

証明　$[\xi] \in S_x$ のうちで λ 部分が $\lambda = (1,0)$ と $\lambda = (0,1)$ に等しいものは

$$\xi^{\dot{0}} = \begin{pmatrix} ix^{0\dot{0}} \\ ix^{1\dot{0}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{\dot{1}} = \begin{pmatrix} ix^{0\dot{1}} \\ ix^{1\dot{1}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

であるが（成分に合わせて有点添字で番号づけしている），これらは S_x の複素線形空間としての基底を与える．より詳しく言えば，S_x の各要素 ξ は $\xi = \xi^{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ という線形結合の形に一意的に表せる．これは $\pi|_{S_x} : S_x \to \boldsymbol{C}^2$ が線形同型であることを意味する（図 2.6）．こうして S_x が $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ に属することがわかった．逆に $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ の任意の要素 X が与えられたとする．$\pi|_X : X \to \boldsymbol{C}^2$ の逆写像を用いて $\xi^{\dot{0}}, \xi^{\dot{1}}$ を

$$\xi^{\dot{0}} = (\pi|_X)^{-1}(1,0), \quad \xi^{\dot{1}} = (\pi|_X)^{-1}(0,1)$$

と定めれば，それらの λ 部分は $(1,0)$, $(0,1)$ という形をしている．残りの部分によって (2.25) のように $x^{a\dot{a}}$ を定義すれば $X = S_x$ となる．こうして写像

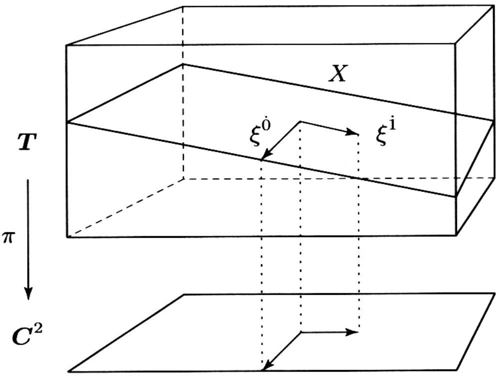


図 2.6　$\pi|_X : X \to \boldsymbol{C}^2$ が線形同型になる場合

$\mathbf{CM} \to \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の像が $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ に一致することがわかる．X から $\xi^{\dot{0}}, \xi^{\dot{1}}$ を介して $x^{a\dot{a}}$ が復元できるので単射性も同時にわかる．□

$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ の定義の中で X に課された条件は X の微小変形で保たれるので，$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ は $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の開部分集合である．あとで 4×2 行列によってグラスマン多様体の点を指定する方法を説明するが，それによってグラスマン多様体が $\boldsymbol{C}^4$ に正則同型ないくつかの開集合で覆われることもわかる．$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ はその開集合の一つであり，今得られた全単射

$$\mathbf{CM} \simeq \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})' \tag{2.26}$$

が $\mathbf{CM} = \boldsymbol{C}^4$ との正則同型を与える．以後この写像によって $\mathbf{CM}$ と $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ を同一視する．α 平面なども $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ の部分集合と見なす．

こうしてグラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ は $\mathbf{CM}$ の一つのコンパクト化（$\mathbf{CM}^\#$ という記号で表される）を与えるということがわかった．ミンコフスキー時空 $\boldsymbol{M}$ の共形コンパクト化 $\boldsymbol{M}^\#$ はその実断面（real slice）と見なせる．同様のことはユークリッド時空 $\boldsymbol{E}$ や超双曲型時空 $\boldsymbol{U}$ の共形コンパクト化についても言える．

4.4 線形群の作用

線形ツイスター空間 $\boldsymbol{T}$ には一般線形群 $\mathrm{GL}(4,\boldsymbol{C})$ が作用する．これから $\mathbf{PT}$ や $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ への作用が引き起こされる．エルミート形式 $\Phi(\xi)$ を保つ部分群

$$\mathrm{SU}(2,2)=\left\{g\in\mathrm{GL}(4,\boldsymbol{C})\;\middle|\;\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}g^*\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=g^{-1}\right\}\tag{2.27}$$

の作用はナルツイスターの集合 $\boldsymbol{PN}$ を保つので，時空内のナル直線をナル直線に（したがって光円錐を光円錐に）写す．すなわち $\mathrm{SU}(2,2)$ の作用は時空上では共形変換となって現れる．ここでは説明を省くが，$\mathrm{SU}(2,2)$ は共形群 $C(1,3)$ の本義共形群（restricted conformal group）と呼ばれる部分群 $C_\uparrow^+(1,3)$ の4重被覆になる．

前述の線形群の作用を具体的に記述するため，$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の要素を 4×2 行列の同値類として表現しよう．$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の要素 X は $\boldsymbol{T}$ の2次元複素線形空間であるから，その基底 $\xi^{\dot{0}},\xi^{\dot{1}}$ を選んで横に並べることによって階数2の行列 $\Xi=(\xi^{\dot{0}}\;\xi^{\dot{1}})$ が対応する．基底の選び方の任意性は $\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{C})$ による右作用 $\Xi\to\Xi h$, $h\in\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{C})$, によって尽くされるから，$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ を

$$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})=\{\Xi=(\xi^{\dot{0}}\mid\xi^{\dot{1}}),\ \xi^{\dot{0}},\xi^{\dot{1}}\in\boldsymbol{C}^4,\ \mathrm{rank}\,\Xi=2\}/\mathrm{GL}(2,\boldsymbol{C})\tag{2.28}$$

というように 4×2 行列の同値類の集合と同一視することができる．射影空間の場合にならって，Ξ の同値類を $[\Xi]$ という記号で表すことにする．

Ξ の6個の 2×2 小行列式

$$p^{ij}(\Xi)=\det\begin{pmatrix}\xi^{i\dot{0}}&\xi^{i\dot{1}}\\\xi^{j\dot{0}}&\xi^{j\dot{1}}\end{pmatrix}\quad(0\le i<j\le 3)\tag{2.29}$$

（ただし $\xi^{\dot{0}},\xi^{\dot{1}}$ の行を $0,1,2,3$ で番号づけした）はプリュッカー座標（Plücker coordinates）と呼ばれる[†8]．$p^{ij}(\Xi h)=p^{ij}(\Xi)\det h$ という等式が成立するので $p^{ij}(\Xi)$ は $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の要素に対して定数倍の不定性があるが，それがゼロであるか否かはこの不定性によらず確定する．$p^{ij}(\Xi)$ がゼロでないような点から

[†8] プリュッカー座標は $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の $\mathbf{CP}^5$ への埋め込み（プリュッカー埋め込み）にも用いられる．第3章を参照されたい．

なる $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ の開集合を U_{ij} と表そう：

$$U_{ij}=\{[\Xi]\in \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})\mid p^{ij}(\Xi)\neq 0\} \tag{2.30}$$

U_{ij} の上では Ξ の i,j 行からなる 2×2 行列は可逆だから，その逆行列を Ξ の右から乗じることによって Ξ を

$$\begin{aligned}\xi^{i\dot{0}}&=1, & \xi^{i\dot{1}}&=0,\\ \xi^{j\dot{0}}&=0, & \xi^{j\dot{1}}&=1\end{aligned}$$

というように正規化することができる．残りの 4 個の行列要素は U_{ij} の座標系と見なせる．こうして $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ は $\boldsymbol{C}^4$ に正則同型な 6 個の開集合 U_{ij} で覆われることがわかる．

特に $U_{23}=\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ であり，その上で Ξ の正規化を行えば S_x の基底 (2.25) を並べた行列

$$\Xi(x)=\begin{pmatrix} ix\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ix^{0\dot{0}} & ix^{0\dot{1}}\\ ix^{1\dot{0}} & ix^{1\dot{1}}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{2.31}$$

が得られる．これを用いて線形群の作用を次のように具体的に表示することができる．

定理 2.8　$\mathrm{GL}(4,\boldsymbol{C})$ あるいは $\mathrm{SU}(2,2)$ に属する行列 g を 2×2 ブロック a,b,c,d に分けて

$$g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

と表すとき，g の $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ における作用は x に対する有理変換

$$ix\ \rightarrow\ ix'=(aix+b)(cix+d)^{-1} \tag{2.32}$$

を引き起こす．

証明　$\Xi(x)$ に g を乗じたもの $g\Xi(x)$ は

$$g\Xi(x) = \begin{pmatrix} aix+b \\ cix+d \end{pmatrix}$$

となる．これに右から $cix+d$ の逆行列を乗じて

$$g\Xi(x)(cix+d)^{-1} = \Xi(x'), \quad ix' = (aix+b)(cix+d)^{-1}$$

を得る．$x \to x'$ が求める変換を与える．□

基本的な変換を以下に示す．特に，通常の時空座標で書けば非線形な共形変換がじつは $\boldsymbol{T}$ 上の線形変換に対応している，ということに注目されたい．

1. $h \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ に対して

$$g = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h^{*-1} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

は $\mathrm{SU}(2,2)$ に属する．x に対する変換はローレンツ変換 $x \to x' = hxh^*$ である．

2. 2×2 エルミート行列 $a = a^*$ に対して

$$g = \begin{pmatrix} 1 & ia \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

は $\mathrm{SU}(2,2)$ に属する．x に対する変換は並進 $x \to x' = x + a$ である．

3. $h \in \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})$ に対して

$$g = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h^{*-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

は $\mathrm{SU}(2,2)$ に属する．x に対する変換は一般化された反転 $x \to x' = -hx^{-1}h^*$ である．

4. $c \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$g = \begin{pmatrix} c1 & 0 \\ 0 & c^{-1}1 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

は $\mathrm{SU}(2,2)$ に属する．x に対する変換は引き延ばし $x \to x' = c^2 x$ である．

5　時空とツイスター空間の幾何学的対応

これまで見てきたことはクライン対応の言葉で統一的に説明できる．クライン対応はグラスマン多様体（時空）と射影空間（ツイスター空間）が旗多様体からの射影によって結ばれた構造である．さらにこれはより大きな対応構造（双対ツイスター空間やアンビツイスター空間を含む）の一部であることがわかる．ユークリッド時空や超双曲型時空の場合についても最後に簡単に触れる．

5.1　クライン対応

クライン対応（Klein correspondence）は $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^4)$ と $\mathbf{CP}^3$ を次のような写像で結んだものである：

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{C}^4) & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^4) & & \mathbf{CP}^3 \end{array}$$

ここで $\mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{C}^4)$ は入れ子になった複素線形部分空間 $X_1 \subset X_2 \subset \boldsymbol{C}^4$ の組 (X_1, X_2) からなる旗多様体（flag manifold）

$$\mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{C}^4) = \{(X_1,X_2) \mid X_1 \subset X_2 \subset \boldsymbol{C}^4,\ \dim X_1 = 1,\ \dim X_2 = 2\} \tag{2.37}$$

であり，p_1, p_2 は自然に決まる射影

$$p_2(X_1,X_2) = X_2, \quad p_1(X_1,X_2) = X_1$$

を表す．また，$[\xi]$ を ξ の張る 1 次元線形空間 $\mathbf{C}\xi$ すなわち複素射線（complex ray）と同一視することによって，$\mathbf{CP}^3$ を

$$\mathbf{CP}^3 = \{X_1 \subset \boldsymbol{C}^4 \mid \text{複素線形部分空間},\ \dim X_1 = 1\} \tag{2.38}$$

というように複素射線の集合と見なしている．

このクライン対応は $\mathbf{CM}^{\#} = \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})$ 全体に関するものだが，$\mathbf{CM} = \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ のツイスター理論を扱うにはそれを $\boldsymbol{F}' = p_2^{-1}(\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})')$（これは $\boldsymbol{F} = \mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{T})$ の開部分集合である）に制限したもの

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{F}' = p_2^{-1}(\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})') & \\ & {\scriptstyle p_2'}\swarrow \qquad \searrow{\scriptstyle p_1'} & \\ \mathbf{CM} = \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})' & & \mathbf{PT}' \end{array}$$

を考えればよい．ただし p_1, p_2 を $\boldsymbol{F}'$ に制限したものをもとの p_1, p_2 と記号上区別するため p_1', p_2' と表した．$\boldsymbol{F}'$ の任意の要素 (X_1, X_2) は包含関係 $X_1 \subset X_2$ にある複素線形部分空間 $X_1 \subset \boldsymbol{T}$, $X_2 \subset \boldsymbol{T}$ からなる．X_1, X_2 はそれぞれある $x \in \mathbf{CM}$, $[\xi] \in \mathbf{PT}'$ によって

$$X_2 = S_x, \quad X_1 = \mathbf{C}\xi$$

と表せる．包含関係 $X_1 \subset X_2$ は ξ と x を結ぶ関係式 $\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ を言い換えたものになっている．μ はこの関係式によって x と λ から決まるので，(X_1, X_2) は x と $[\lambda] \in \mathbf{CP}^1$ によって定まることがわかる．そこで (X_1, X_2) に $(x, [\lambda])$ を対応させることによって

$$\boldsymbol{F}' \simeq \mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1 \tag{2.39}$$

という正則同型が得られる．この正則同型によって $\boldsymbol{F}'$ を $\mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1$ と同一視すれば（図 2.7），p_1' と p_2' はそれぞれ

$$p_1'(x, [\lambda]) = [\xi], \quad \xi = (ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}}) \tag{2.40}$$

および

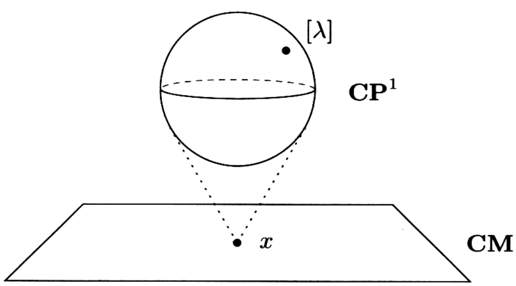


図 2.7 $\boldsymbol{F}' \simeq \mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1$ の点 $(x, [\lambda])$

$$p_2'(x, [\lambda]) = x \tag{2.41}$$

というように表現できる．

この $\boldsymbol{F}'$ を仲介とする対応から α 平面やツイスター直線が正しく再現できることを示そう．まず $x \in \mathbf{CM}$ が任意に与えられたとする．x には $S_x \in \mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{T})'$ が対応する．$p_1'({p_2'}^{-1}(S_x))$ は $\xi \in S_x$ という条件を満たす $[\xi] \in \mathbf{PT}'$ からなるが，

$$\xi \in S_x \iff [\xi] \in \Gamma_x$$

であるから

$$p_1'({p_2'}^{-1}(S_x)) = \Gamma_x \tag{2.42}$$

となる．今度は $[\xi] \in \mathbf{PT}'$ が任意に与えられたとする．$p_2'({p_1'}^{-1}([\xi]))$ は $\xi \in S_x$ という条件を満たす S_x からなるが，

$$\xi \in S_x \iff \mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} \iff x \in \alpha_{[\xi]}$$

であるから

$$p_2'({p_1'}^{-1}([\xi])) = \alpha_{[\xi]} \tag{2.43}$$

となる．要するに，$x \mapsto \Gamma_x$ や $[\xi] \mapsto \alpha_{[\xi]}$ という対応は p_1', p_2' の一方で引き戻して他方で押し出すことに他ならない．

注意 1　もとのクライン対応を通じて $[\xi] \in \mathbf{PT}$ に対応する $\mathbf{CM}^{\#}$ の部分集合 $p_2(p_1^{-1}([\xi]))$ は $\mathbf{CP}^2$ に正則同型であり，$[\xi]$ が $\mathbf{PT}'$ に属する場合にはそれと $\mathbf{CM}$ との共通部分として $\boldsymbol{C}^2$ と正則同型な $\alpha_{[\xi]}$ が切り出される．言い換えれば $p_2(p_1^{-1}([\xi]))$ は $\alpha_{[\xi]}$ のコンパクト化であり，これを α 平面と呼ぶことも多い．$\mathbf{TP}$ の相異なる 2 点 $[\xi], [\xi']$ に対して $p_2(p_1^{-1}([\xi]))$ と $p_2(p_1^{-1}([\xi']))$ はちょうど 1 点で交わる．交点 x は ξ, ξ' を並べた行列 $\Xi = (\xi\ \xi')$ に対応するグラスマン多様体の点に他ならない（図 2.8）．

注意 2　時空点 x に対応するツイスター直線 Γ_x は逆に時空内の特別な α 平面の族 $\{\alpha_{[\xi]} \mid [\xi] \in \Gamma_x\}$ をラベルづけしていると解釈することもできる．同様のことはツイスター $[\xi]$ に対して定まるツイスター直線の族 $\{\Gamma_x \mid x \in \alpha_{[\xi]}\}$ についても言える．これらについて次のことがわかる．

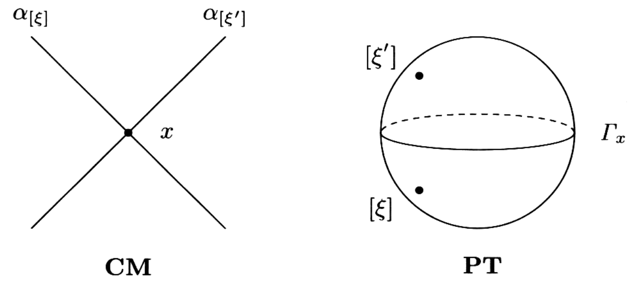


図 2.8　α 平面が交差する場合

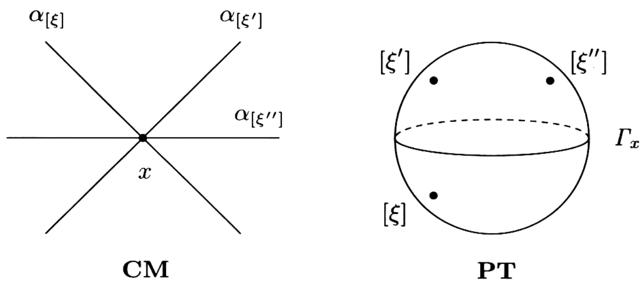


図 2.9　1 点を通る α 平面の族

1. ツイスター直線 Γ_x の各点 $[\xi]$ に対応する α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ はいずれも x を通る．時空点 x はこれらの α 平面の共通点である．すなわち

$$\bigcap_{[\xi]\in\Gamma_x} \alpha_{[\xi]} = \{x\} \tag{2.44}$$

が成立する（図 2.9）．

2. α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ の各点 x に対応するツイスター直線 Γ_x はいずれも $[\xi]$ を通る．ツイスター $[\xi]$ はこれらのツイスター直線の共通点である．すなわち

$$\bigcap_{x\in\alpha_{[\xi]}} \Gamma_x = \{[\xi]\} \tag{2.45}$$

が成立する（図 2.10）．

時空とツイスター空間の間の対応の幾何学的側面については，このほかにもいろいろなことがわかっている．詳しくはペンローズの原論文 [66] を参照されたい．

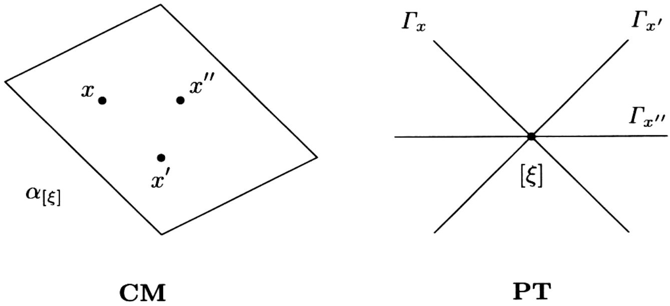


図 **2.10**　1 点を通るツイスター直線の族

5.2　3 種類のツイスター空間を含む対応図式

双対ツイスター空間やアンビツイスター空間についても複素時空との多対多の対応関係が考えられるが，じつはこれらはすべて次の一つの図式にまとめることができる．

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \swarrow & \mathrm{Fl}(1,2,3,\boldsymbol{C}^4) \ \downarrow & \searrow & \\
\mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{C}^4) & & \mathrm{Fl}(1,3,\boldsymbol{C}^4) & & \mathrm{Fl}(2,3,\boldsymbol{C}^4) \\
\downarrow \quad \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow \quad \downarrow \\
\mathbf{CP}^3 & & \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^4) & & \mathrm{Fl}(3,\boldsymbol{C}^4)
\end{array}
$$

ここで，一般に次元の条件 $\dim X_{i_1} = i_1, \ldots, \dim X_{i_r} = i_r$ および包含関係 $X_{i_1} \subset \cdots \subset X_{i_r} \subset \boldsymbol{C}^n$ を満たす $\boldsymbol{C}^n$ の複素線形部分空間の組 $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})$ からなる旗多様体を $\mathrm{Fl}(i_1, \ldots, i_r, \boldsymbol{C}^n)$ という記号で表している．射影はいずれも特定の次元の線形部分空間やその組を対応させる写像である．$[\eta] \in \mathbf{CP}^{3*}$ に $\{\xi \in \boldsymbol{C}^4 \mid \langle \eta, \xi \rangle = 0\} \in \mathrm{Fl}(3, \boldsymbol{C}^4)$ を対応させることによって $\mathbf{CP}^{3*} \simeq \mathrm{Fl}(3, \boldsymbol{C}^4)$ という同一視を行えば，上の図式の最下段の右端が双対ツイスター空間 $\mathbf{PT}^*$ に対応すること

$$\mathrm{Fl}(3, \boldsymbol{C}^4) \ \simeq \ \mathbf{PT}^* \tag{2.46}$$

がわかる．さらに

$$\langle \eta, \xi \rangle = 0 \iff \boldsymbol{C}\xi \subset \{\xi \in \boldsymbol{C}^4 \mid \langle \eta, \xi \rangle = 0\}$$

という言換えに注意すれば，中央の旗多様体がアンビツイスター空間に他ならないこと

$$\mathrm{Fl}(1,3,\boldsymbol{C}^4) \simeq \mathbf{AT} \tag{2.47}$$

もわかる．時空との対応は前述の図式から $\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^4)$，$\mathrm{Fl}(1,2,3,\boldsymbol{C}^4)$，$\mathrm{Fl}(1,3,\boldsymbol{C}^4)$ に関係する部分を切り出してきたもの

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Fl}(1,2,3,\boldsymbol{C}^4) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^4) & & \mathrm{Fl}(1,3,\boldsymbol{C}^4) \end{array}$$

によって決まる．

5.3　他の型の時空の場合

ユークリッド時空 $\boldsymbol{E}$ や超双曲型時空 $\boldsymbol{U}$ も同じ複素時空 $\mathbf{CM}$ の中に異なる実断面として含まれている．これらのツイスター理論を組み立てるには (2.6) の代わりに虚数単位を除去した関係式

$$\mu^a = x^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} \tag{2.48}$$

を用いるのが自然である．α 平面，β 平面，ツイスター直線などもこれに応じて

$$\alpha_{[\xi]} = \{x \in \mathbf{CM} \mid \mu^a = x^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}\}, \tag{2.49}$$

$$\beta_{[\eta]} = \{x \in \mathbf{CM} \mid \tilde{\mu}^{\dot{a}} = \tilde{\lambda}_a x^{a\dot{a}}\}, \tag{2.50}$$

$$\mathit{\Gamma}_x = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \mu^a = x^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}\} \tag{2.51}$$

と定義し直す．

ユークリッド時空におけるツイスター理論の取扱いは第5章でゲージ場の方程式を考える際の基礎にもなるので，ここで少し立ち入って説明しておこう．ユークリッド時空にはナルな接ベクターはゼロ以外存在しないので，α 平面は

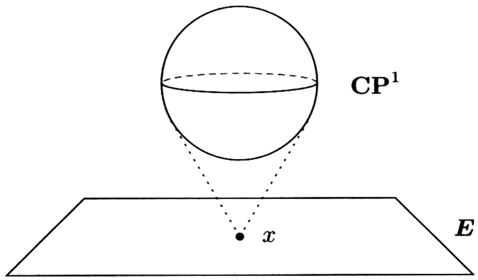


図 2.11 $\boldsymbol{E}$ 上の $\mathbf{CP}^1$ 束としての $\mathbf{PT}'$

ユークリッド時空 $\boldsymbol{E} \subset \mathbf{CM}$ と

$$\alpha_{[\xi]} \cap \boldsymbol{E} = \{x\} \tag{2.52}$$

というように 1 点のみで交差する．ツイスター空間からユークリッド時空への写像

$$p : \mathbf{PT}' \to \boldsymbol{E}$$

を $[\xi]$ にこの交点 x を対応させるもの

$$p([\xi]) = x \tag{2.53}$$

として定義する．これによって旗多様体を経由せず直接に時空とツイスター空間を結ぶことが可能になる．$x \in \boldsymbol{E}$ の p による逆像 $p^{-1}(x)$ はツイスター直線 Γ_x に他ならないので，$\mathbf{PT}'$ は $\boldsymbol{E}$ 上の $\mathbf{CP}^1$ 束となるが（図 2.11），実際にはこれは自明束である．

p を具体的に座標表示することもできる．第 1 章でも触れた複素座標

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + ix^4), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2)$$

を用いて時空座標の行列

$$x = \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

を定める．$\alpha_{[\xi]}$ と $\boldsymbol{E}$ の交点の座標は (2.48) とその複素共役を組み合わせて得られる関係式

$$\begin{pmatrix} \mu^0 & -\overline{\mu^1} \\ \mu^1 & \overline{\mu^0} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \lambda_{\dot{0}} & -\overline{\lambda_{\dot{1}}} \\ \lambda_{\dot{1}} & \overline{\lambda_{\dot{0}}} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

を満たすことがわかる．これを x に関する連立線形方程式として解けば，結果は

$$y = \frac{\mu^0\overline{\lambda_{\dot{0}}} + \overline{\mu^0}\lambda_{\dot{1}}}{\lambda_{\dot{0}}\overline{\lambda_{\dot{0}}} + \lambda_{\dot{1}}\overline{\lambda_{\dot{1}}}}, \quad z = \frac{\mu^1\overline{\lambda_{\dot{0}}} - \overline{\mu^0}\lambda_{\dot{1}}}{\lambda_{\dot{0}}\overline{\lambda_{\dot{0}}} + \lambda_{\dot{1}}\overline{\lambda_{\dot{1}}}} \tag{2.56}$$

となる[†9]．また，**PT** の反正則対合写像 $\sigma : \mathbf{PT} \to \mathbf{PT}$ を

$$\sigma(\mu^0, \mu^1, \lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}}) = (-\overline{\mu^1}, \overline{\mu^0}, -\overline{\lambda_{\dot{1}}}, \overline{\lambda_{\dot{0}}}) \tag{2.57}$$

と定めれば，同じ連立線形方程式から $\sigma(p^{-1}(x)) = p^{-1}(x)$ が成立する（すなわち σ は p のファイバーを保つ）ということもわかる．

写像 p は4次元球面 S^4 （これが $\boldsymbol{E}$ の共形コンパクト化に他ならない）への C^∞ 写像

$$p : \mathbf{PT} \ \to \ S^4 = \boldsymbol{E} \cup \{\infty\}$$

に拡張できる．これも $\mathbf{CP}^1$ 束の構造をもつが，$\boldsymbol{E}$ の場合と違ってこれは自明束ではない．この写像はハミルトンの四元数（quaternion）の代数 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}i + \boldsymbol{R}j + \boldsymbol{R}k$ [†10]を用いて

$$p : \mathbf{PT} = \mathbf{CP}^3 \ \to \ S^4 = \mathbf{HP}^1 \tag{2.58}$$

という写像と見なすこともできる．ここで $\mathbf{HP}^1$ は四元数上の射影直線である．p は $\mathbf{CP}^3$ と $\mathbf{HP}^1$ を

$$\mathbf{CP}^3 = \boldsymbol{H}^2/\mathrm{GL}(1, \boldsymbol{C}), \quad \mathbf{HP}^1 = \boldsymbol{H}^2/\mathrm{GL}(1, \boldsymbol{H}) \tag{2.59}$$

という商集合として表すときの自然な射影として定義される．ここで

[†9] スピン構造がミンコフスキー時空とは異なるので，$\mu^a, \lambda_{\dot{a}}$ の複素共役はスピナー添字を書き直さずにそのまま $\overline{\mu^a}, \overline{\lambda_{\dot{a}}}$ と記すことにする．書き直せば $\overline{\mu^0} = -\bar{\mu}^1$, $\overline{\mu^1} = -\bar{\mu}^0$ などとなる（$\sigma : \mathbf{PT} \to \mathbf{PT}$ の定義を参照されたい）．

[†10] i, j, k は $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ という基本関係式を満たす．四元数の代数は非可換だが体をなす（すなわち0以外の要素が逆をもつ）ので，その上の線形空間や射影空間を考えることができる．

$$\mathrm{GL}(1,\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{GL}(1,\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \setminus \{0\}$$

という記号を用いた．このことは次のようにして説明できる．四元数を $\alpha = \alpha^0 + j\alpha^1$ $(\alpha^0, \alpha^1 \in \boldsymbol{C})$ というように二つの複素数の組 (α^0, α^1) で表せば，

$$\alpha^0 + j\alpha^1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^0 & -\overline{\alpha^1} \\ \alpha^1 & \overline{\alpha^0} \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

というように 2×2 複素行列と対応づけることができる．この意味で時空座標の行列 $x = (x^{a\dot{a}})$ は $y + jz$ という四元数に対応する．容易に確かめられるようにこの対応は和・積演算を保つ（言い換えれば四元数の代数の複素行列による表現を与えている）．前述の x と $\xi = (\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ を結ぶ関係式は四元数によって

$$\mu^0 + j\mu^1 = (y + jz)(\lambda_{\dot{0}} + j\lambda_{\dot{1}}) \tag{2.61}$$

という簡潔な形に表せる．前述の連立線形方程式を解く議論はこれを

$$y + jz = (\mu^0 + j\mu^1)(\lambda_{\dot{0}} + j\lambda_{\dot{1}})^{-1}$$

と書き直すことに他ならない．したがって，$\xi = (\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ を $\boldsymbol{H}^2$ の要素 $(\mu^0 + j\mu^1,\ \lambda_{\dot{0}} + j\lambda_{\dot{1}})$ と解釈すれば，$y + jz$ は前述の自然な射影 $p : \mathbf{CP}^3 \to \mathbf{HP}^1$ による $[\xi] \in \mathbf{CP}^3$ の像 $p([\xi])$ を $\mathbf{HP}^1$ の非斉次座標で見たものになる．こうして四元数による p の再定義がこれまでの定義と同じものであることがわかる．四元数による定式化はスピン構造の観点から見て自然であるだけでなく，ADHM 構成法と呼ばれるヤン–ミルズ方程式の特殊解の構成法（第 5 章を参照されたい）とも密接な関係がある．

ユークリッド空間の場合と対照的に，超双曲型時空 $\boldsymbol{U}$ の場合には α 平面との交差は実 2 次元平面となる．この平面は実多様体の意味で計量 $ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2$ に関して全ナルである．この意味で $\boldsymbol{U}$ においては複素時空上のツイスター幾何学と同じ状況が実多様体として実現されることになる．また，複素射影空間 $\mathbf{CP}^3$ の代わりに実射影空間 $\mathbf{RP}^3$ を用いてツイスター理論を展開することもできる．

6 無質量自由場の積分表示

無質量自由場の積分表示は一種の周回積分である．周回積分の被積分函数は線形ツイスター空間 $\boldsymbol{T}$ の適当な開部分集合上で定義された斉次正則函数であり，積分路はツイスター直線をリーマン球面と見なしてその中に選んだ閉曲線である．ペンローズは正ヘリシティの場合と負ヘリシティの場合で異なる積分表示を与えている．この積分表示の意味づけを考える際にナルツイスターの集合 **PN** を境にしたツイスター空間 **PT** の分割が重要な指針を与える．最後に，積分表示のコホモロジー的解釈について触れる．

6.1 正ヘリシティの自由場の方程式の場合

ペンローズは正ヘリシティの無質量自由場の方程式[†11]

$$\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_{2s}} = 0 \tag{2.62}$$

に対して

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_{2s}}(x) = \oint_{C_x} \lambda_{\dot{a}_1}\cdots\lambda_{\dot{a}_{2s}} f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}}) \frac{\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} \tag{2.63}$$

という周回積分の形で解を与えた[†12]．ここで C_x は $\lambda = (\lambda_{\dot{a}})$ を斉次座標とするリーマン球面 $S^2 \simeq \mathbf{CP}^1$ 上の閉曲線であり，x の変化に対して連続的に変形するものとする．$f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})$ は $\boldsymbol{T}$ の適当な開集合（任意の $c \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ によるスカラー倍 $\xi \to c\xi$ で不変であるものとするが，詳しい設定はあとで議論する）で定義された $-2s-2$ 次斉次正則函数 $f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ にツイスターと時空座標を結ぶ基本的関係式 (2.6) を代入したものである．最後の微分形式は具体的に書けば

$$\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}} = \lambda_{\dot{0}}d\lambda_{\dot{1}} - \lambda_{\dot{1}}d\lambda_{\dot{0}} = \lambda_{\dot{0}}^2 d\zeta$$

となるので（最後に $\mathbf{CP}^1$ の非斉次座標 $\zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$ を用いた）本質的には $d\zeta$ に等しいが，斉次座標でこのように表しておくことによって $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に関す

[†11] $\partial^{a\dot{a}}$ は $\partial_{a\dot{a}} = \partial/\partial x^{a\dot{a}}$ の添字を $\partial^{a\dot{a}} = \epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\partial_{b\dot{b}}$ というように上げたものである，ということを思い出されたい．

[†12] $f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})$ は $f(ix^{0\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, ix^{1\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}})$ を略記したものである．以後このような略記法を断りなしに用いる．

る対称性が明瞭になる．この微分形式も考慮に入れれば積分の中身は λ について 0 次斉次であり，特に周回積分が意味をなす．

この周回積分が自由場の方程式を満たすことを確かめておこう．

定理 2.9　この周回積分は (2.62) を満たす．

証明　(2.63) に $\partial^{b\dot{b}}$ を作用させて $\dot{b} = \dot{a}_1$ として縮約すれば

$$\partial^{b\dot{b}}\psi_{\dot{b}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_{2s}}(x) = \oint_{C_x} \lambda_{\dot{a}_2}\cdots\lambda_{\dot{a}_{2s}}\lambda_{\dot{b}}\partial^{b\dot{b}} f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})\frac{\lambda_{\dot{c}}d\lambda^{\dot{c}}}{2\pi i}$$

が得られる．ここに現れた微分演算子 $\lambda_{\dot{b}}\partial^{b\dot{b}}$ は $f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})$ という形の任意の正則函数を消す

$$\lambda_{\dot{b}}\partial^{b\dot{b}} f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}}) = 0$$

という特徴をもつ．したがって (2.62) が成り立つ．□

上の積分表示を $\mathbf{CP}^1$ の非斉次座標 $\zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$ で書き直してみよう．$f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ の斉次性から

$$f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}}) = \lambda_{\dot{0}}^{-2s-2} f(ix^{0\dot{0}} + ix^{0\dot{1}}\zeta, ix^{1\dot{0}} + ix^{1\dot{1}}\zeta, 1, \zeta)$$

となる．そこで，スピナー場の $2s+1$ 個の成分を

$$\psi_k = \psi_{\underbrace{\dot{0}\cdots\dot{0}}_{2s-k}\underbrace{\dot{1}\cdots\dot{1}}_{k}} \quad (k = 0, \ldots, 2s)$$

というように番号づけすれば，各成分に対する積分表示

$$\psi_k(x) = \oint_{C_x} \zeta^k f(ix^{0\dot{0}} + ix^{0\dot{1}}\zeta, ix^{1\dot{0}} + ix^{1\dot{1}}\zeta, 1, \zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{2.64}$$

が得られる．(2.62) をこの設定に書き直せば

$$\partial_{0\dot{1}}\psi_k - \partial_{0\dot{0}}\psi_{k+1} = 0, \quad \partial_{1\dot{1}}\psi_k - \partial_{1\dot{0}}\psi_{k+1} = 0 \tag{2.65}$$

となるが，このことからも周回積分が自由場の方程式の解であることがわかる．さらに，被積分函数の構造がカーの定理に登場したものと同じであることに注目されたい．特に f が 1 位の極のみをもつ有理型函数の場合には，この周回積分を留数計算で処理することによって $g = 1/f$ の零点（すなわち

$$g(ix^{0\dot{0}}+ix^{0\dot{1}}\zeta, ix^{1\dot{0}}+ix^{1\dot{1}}\zeta, 1, \zeta)=0$$

という方程式の解) $\zeta=\zeta(x)$ ならびに $\zeta=\zeta(x)$ における $f(ix^{0\dot{0}}+ix^{0\dot{1}}\zeta, ix^{1\dot{0}}+ix^{1\dot{1}}\zeta, 1, \zeta)$ の留数を用いて結果が書ける．明らかに $\zeta(x)$ の構成はカーの定理そのものであり，それを用いて自由場の方程式の解を表すことはロビンソンの定理に相当する．

6.2 負ヘリシティの自由場の方程式の場合

ペンローズは負ヘリシティの無質量自由場の方程式

$$\partial^{a\dot{a}}\phi_{aa_2\cdots a_{2s}}=0 \tag{2.66}$$

に対しても

$$\phi_{a_1\cdots a_{2s}}(x)=\oint_{C_x} f_{a_1\cdots a_{2s}}(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})\frac{\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} \tag{2.67}$$

という形で解を与えた．ここで $f_{a_1\cdots a_{2s}}(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ は **PT** の適当な開集合上で定義された $2s-2$ 次斉次正則函数 $f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ の導函数

$$f_{a_1\cdots a_{2s}}(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})=\frac{\partial}{\partial\mu^{a_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\mu^{a_{2s}}}f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$$

を表す．

定理 2.10 この周回積分は (2.66) を満たす．

証明 (2.66) に $\partial^{b\dot{b}}$ を作用させて $b=a_1$ として縮約すれば

$$\begin{aligned}\partial^{b\dot{b}}\phi_{ba_2\cdots a_{2s}}(x)&=\oint_{C_x}\epsilon^{bc}\epsilon^{\dot{b}\dot{c}}\partial_{c\dot{c}}f_{ba_2\cdots a_{2s}}(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})\frac{\lambda_{\dot{e}}d\lambda^{\dot{e}}}{2\pi i}\\&=\oint_{C_x}\epsilon^{bc}\epsilon^{\dot{b}\dot{c}}i\lambda_{\dot{c}}f_{cba_2\cdots a_{2s}}(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})\frac{\lambda_{\dot{e}}d\lambda^{\dot{e}}}{2\pi i}\end{aligned}$$

となる．ここでライプニッツの規則から従う等式

$$\partial_{c\dot{c}}f_{a_1\cdots a_{2s}}(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})=i\lambda_{\dot{c}}f_{ca_1\cdots a_{2s}}(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})$$

を用いた．$f_{cba_2\cdots a_{2s}}$ は b, c について対称だから，ϵ^{bc} を乗じて縮約すると消える．□

この場合にも $\mathbf{CP}^1$ の非斉次座標による書換えができる．スピナー場の成分を

$$\phi_k = \phi_{\underbrace{0\cdots0}_{2s-k}\underbrace{1\cdots1}_{k}} \quad (k = 0, \ldots, 2s)$$

というように番号づけする．$f_{a_1 \cdots a_{2s}}$ についても同様に

$$f_k = f_{\underbrace{0\cdots0}_{2s-k}\underbrace{1\cdots1}_{k}}$$

と表せば，f_k は f と

$$f_k = \left(\frac{\partial}{\partial \mu^0}\right)^{2s-k} \left(\frac{\partial}{\partial \mu^1}\right)^k f$$

という関係で結ばれる．こうして周回積分は

$$\phi_k(x) = \oint_{C_x} f_k(ix^{0\dot{0}} + ix^{0\dot{1}}\zeta, ix^{1\dot{0}} + ix^{1\dot{1}}\zeta, 1, \zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{2.68}$$

という形になる．他方，(2.66) は

$$\partial_{1\dot{0}}\phi_k - \partial_{0\dot{0}}\phi_{k+1} = 0, \quad \partial_{1\dot{1}}\phi_k - \partial_{0\dot{1}}\phi_{k+1} = 0 \tag{2.69}$$

と書ける．上の周回積分がこの方程式を満たすことはただちにわかる．

なお，双対ツイスター空間に基づいて正ヘリシティの場合と同様の積分表示

$$\phi_{a_1 \cdots a_{2s}}(x) = \oint_{C_x} \tilde{\lambda}_{a_1} \cdots \tilde{\lambda}_{a_{2s}} g(i\tilde{\lambda}_a x^{a\dot{a}}, \tilde{\lambda}_a)\frac{\tilde{\lambda}_b d\tilde{\lambda}^b}{2\pi i} \tag{2.70}$$

が得られることも注意しておきたい．ここで $g(\tilde{\mu}^{\dot{a}}, \tilde{\lambda}_a)$ は $\boldsymbol{T}^*$ の適当な開集合で定義された $-2s-2$ 次斉次正則函数である．これは要するに $x = (x^{a\dot{a}})$ の行と列の役割を入れ替えたものであるが，この入れ替えはミンコフスキー空間では空間鏡映 $x^1 \leftrightarrow x^2$ に相当する．この鏡映によって 2 次微分形式の空間の自己双対部分と反自己双対部分も入れ替わる．この意味で，電磁場を分解したときに現れる対称スピナー場のうち $\psi_{\dot{a}\dot{b}}$ に対しては $\mathbf{PT}$ に基づく正ヘリシティの自由場の積分表示を適用する一方，ϕ_{ab} に対しては $\mathbf{PT}^*$ に基づく上の積分表示を用いれば，電磁場の自己双対部分と反自己双対部分を対象に扱うことができる．これはとりわけ実数値の電磁場を構成する目的に適している．

注意　自由場の方程式に従うスピナー場の各成分はクライン–ゴルドン方程式を満たす．その意味でこれまで見た自由場の積分表示は同時にスピン 0 の自由スカラー場の

積分表示も与えている．具体的には $\psi_{\dot{0}\cdots\dot{0}}$ や $\phi_{0\cdots 0}$ が自由スカラー場に対応すると考えてよい．こうして自由スカラー場の積分表示

$$\phi(x) = \oint_{C_x} f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}}) \frac{\lambda_{\dot{b}} d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} \tag{2.71}$$

が得られる．ここで $f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ は $\boldsymbol{T}$ の適当な開集合で定義された -2 次斉次正則関数である．$\mathbf{PT}^*$ に基づく積分表示も同様の形で与えられる．

6.3　ツイスター空間の分割

ツイスター空間 $\mathbf{PT}$ はナルツイスターの集合 $\mathbf{PN}$ を境として二つの部分

$$\mathbf{PT}_{\pm} = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \pm\Phi(\xi) > 0\} \tag{2.72}$$

に分かれる．SU(2,2) の作用は $\Phi(\xi)$ を不変にするので，ツイスター空間の三つの部分への分割

$$\mathbf{PT} = \mathbf{PT}_{-} \cup \mathbf{PN} \cup \mathbf{PT}_{+} \tag{2.73}$$

も不変に保つ．詳しい説明は省くが（たとえばウェルズの論文 [103] を参照されたい），$\mathbf{PT}_{\pm}$ と $\mathbf{PN}$ には SU(2,2) が推移的に作用するので，上の分割はこの作用に関する $\mathbf{PT}$ の軌道分解（orbit decomposition）である．このような見方はツイスター理論の表現論的一般化につながるが，ここではこれ以上は追求しない．以下ではこのツイスター空間の分割と複素時空 $\mathbf{CM}$ の関係を考える．これは自由場の積分表示において $f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ の定義域をどのように選ぶかという問題に指針を与える．

複素時空点が与えられたとする．その座標 x^μ が複素数であれば，$x = (x^{a\dot{a}})$ のエルミート共役 x^* は

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{x}^0 + \bar{x}^3 & \bar{x}^1 - i\bar{x}^2 \\ \bar{x}^1 + i\bar{x}^2 & \bar{x}^0 - \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

となる．エルミート性からのずれを測る量 $(x - x^*)/(2i)$ は

$$\frac{x - x^*}{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} x^0 + \operatorname{Im} x^3 & \operatorname{Im} x^1 - i \operatorname{Im} x^2 \\ \operatorname{Im} x^1 + i \operatorname{Im} x^2 & \operatorname{Im} x^0 - \operatorname{Im} x^3 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

となり，ちょうど x^μ の虚数部分を取り出すことに対応している．これについて次のことが示せる．

定理 2.11 複素時空点 x とそのツイスター曲線 Γ_x に関して次のことが成立する．

1. $(x - x^*)/(2i) = 0 \Longleftrightarrow \Gamma_x \subset \mathbf{PN}$.
2. $\mp(x - x^*)/(2i)$ は正定値 $\Longleftrightarrow \Gamma_x \subset \mathbf{PT}_\pm$.

注意 第1の主張はミンコフスキー時空自体に関するものであるが，第2の主張はミンコフスキー時空を境界とする前方・後方管状領域（future/past tube）

$$\mathbf{CM}_\pm = \{x \in \mathbf{CM} \mid \mp(x - x^*)/(2i) \text{ は正定値 }\} \tag{2.75}$$

の特徴づけを与えている．特に，クライン対応を制限した対応として

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{F}_\pm = p_2^{-1}(\mathbf{CM}_\pm) & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ \mathbf{CM}_\pm & & \mathbf{PT}_\pm \end{array}$$

というものが得られる．$(x - x^*)/(2i)$ に関する条件は時空座標 x^μ の虚部が時間的かつ未来向き（future pointing）あるいは過去向き（past pointing）であることを意味する．この種の複素領域はツイスター理論の場合に限らず一般にミンコフスキー時空上の自由場の考察において重要な意味をもつ．たとえば，自由場方程式の解がこれらの複素管状領域に正則函数として延長できることは解のフーリエ成分が質量殻の正あるいは負振動部分のみからなることと関連している．また，そのような複素管状領域の正則函数解からミンコフスキー時空への境界値を考えることによって，ミンコフスキー時空上の超函数解なども扱うこともできる．

証明 Γ_x の定義から，$[\xi] \in \Gamma_x$ となる任意のツイスター ξ の λ 部分 $\lambda = (\lambda_{\dot{a}})$ と μ 部分 $\mu = (\mu^a)$ に対して等式 $\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ が成立する．また，その複素共役として $\bar{\mu}^{\dot{a}} = -i\bar{x}^{\dot{a}a}\bar{\lambda}_a$ という等式も成立する．これらのことから $\Phi(\xi)$ は

$$\Phi(\xi) = \bar{\lambda}_a\mu^a + \bar{\mu}^{\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = i(x^{a\dot{a}} - \bar{x}^{\dot{a}a})\bar{\lambda}_a\lambda_{\dot{a}}$$

と表せる．右辺に現れた $x^{a\dot{a}} - \bar{x}^{\dot{a}a}$ は $x - x^*$ の行列要素に他ならない．したがって，$x - x^* = 0$ ならば $\Phi(\xi)$ は λ によらず0であり，また $\mp(x - x^*)/(2i)$ が正定値ならば $\pm\Phi(\xi)$ は λ によらず正値をとる．逆も成り立つ．□

この結果は自由場の積分表示の正確な意味づけの鍵となる．実際，積分表示

における積分路 $C_x \subset S^2$ は $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1 \simeq S^2$ という正則同型を通じて本質的には Γ_x の上に選ばれているので，Γ_x がツイスター空間のどこに位置しているか，という情報が正則函数 $f(\xi) = f(\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ の定義域を設定する際に重要になる．

たとえば積分表示が複素管状領域 $\mathbf{CM}_\pm$ 上の正則函数解を与えるための設定を考えてみよう．上の定理に照らしてみれば Γ_x が動き回るのは $\mathbf{PT}_\pm$ の中に限られる．そこで，f は $\mathbf{PT}_\pm$ の適当な開集合 Z で張られる複素錐体 $\rho^{-1}(Z)$ の上で定義されているとする．ここで ρ は ξ に $[\xi]$ を対応させる射影

$$\rho : \boldsymbol{T} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{PT}$$

を表す．積分表示が $\mathbf{CM}_\pm$ の各点 x で意味をもつためにはこの開集合 Z が Γ_x と空でない部分で交差する必要がある．この交差部分 $\Gamma_x \cap Z$ はその中に積分路 C_x を選べるものでなければならないが，他方，単連結であればコーシーの積分定理によって積分路を1点に縮めることができて積分が0になる．したがって，自由場方程式の非自明な解を得るためには $\Gamma_x \cap Z$ が単連結でないように Z を選ぶ必要がある．このような条件が満たされる典型的な例は

$$Z = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \lambda_{\dot{0}} \neq 0,\ \lambda_{\dot{1}} \neq 0\}$$

である．この場合の $Z \cap \Gamma_x$ はリーマン球面から原点と無限遠点を除いたものに等しいので，C_x を原点周りの円周に選んで非自明な解が得られる．しかしこれは例外的に単純な設定というべきであろう．より複雑な設定を含めて問題を一般的に定式化するにはコホモロジーの言葉が欠かせない．

6.4　積分表示のコホモロジー的解釈

自由場の積分表示のコホモロジー的定式化は最初ペンローズ [69, 71] によって層係数コホモロジーの言葉で示された．その後ウッドハウス [107] とウェルズ [103] によってドルボーコホモロジーによる別の定式化が与えられた．本格的取扱いは第4章に譲って，以下では素朴な形でこれらのコホモロジー的解釈を説明する．

話を簡単にするため一般の時空点 q の小近傍 W で積分表示 (2.63) を考えることにしよう．ツイスター空間では対応する Γ_q の近傍 $U = p_1(p_2^{-1}(W))$ が問

題になる．この近傍が二つの単連結開集合 U_0, U_1 によって $U = U_0 \cup U_1$ と覆われるとする．さらに，W の各点 x に対して Γ_x をリーマン球面と見るとき，$\Gamma_x \cap U_0$ と $\Gamma_x \cap U_1$ はそれぞれ円盤状領域であり，円環状領域を共通部分としてリーマン球面を覆っているとする．たとえば前述の $W = \mathbf{CM}_\pm$ の場合には

$$U_0 = \{[\xi] \in \mathbf{PT}_\pm \mid \lambda_{\dot{0}} \neq 0\}, \quad U_1 = \{[\xi] \in \mathbf{PT}_\pm \mid \lambda_{\dot{1}} \neq 0\}$$

と選べばよい．この設定のもとで，f を $U_0 \cap U_1$ で張られる複素錐体 $\rho^{-1}(U_0 \cap U_1)$ の上に定義された $-2s-2$ 次斉次正則函数，C_x を円環状領域 $\Gamma_x \cap U_0 \cap U_1$ の中の単純閉曲線に選んで積分表示 (2.63) を考えれば（図 2.12），W 上で定義された自由場の方程式の正則函数解が得られる．

さてここで，$\rho^{-1}(U_0)$ 上の $-2s-2$ 次斉次正則函数 g_0 と $\rho^{-1}(U_1)$ 上の $-2s-2$ 次斉次正則函数 g_1 の差 $g_1 - g_0$ を f に加えるとどうなるか，と考えてみる（差 $g_1 - g_0$ の代わりに和 $g_1 + g_0$ を考えても同じことだが，後述の余境界写像と合わせるために差を考える）．(2.63) の右辺には g_0, g_1 の周回積分の項が加わるが，これらの函数はどちらも円盤状の（したがって単連結な）領域で定義されているから，それぞれの周回積分において積分路を 1 点に縮めることができて寄与はゼロとなる．すなわち，(2.63) において f を $f + g_1 - g_0$ に置き換えても結果は変わらない．

このことから，自由場の積分表示は f そのものよりもむしろ $f \sim f + g_1 - g_0$（g_0, g_1 は前述のような函数）という同値関係に関する同値類 $[f]$ に対して定義

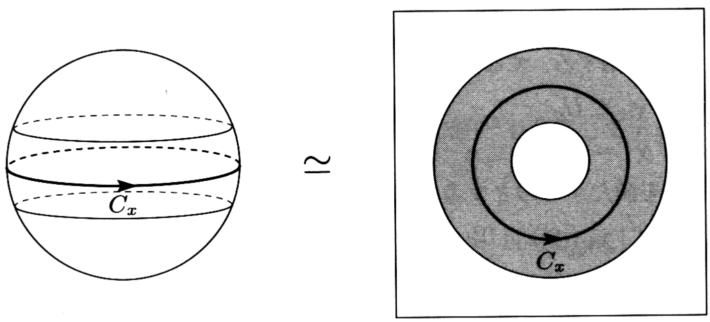


図 2.12　ツイスター直線 $\Gamma_x \simeq S^2 \simeq \mathbf{CP}^1$ 上の円管状領域と積分路

されるものである，という見方が成り立つ．正確に言えば，一般に **PT** の開集合 Z に対して $\rho^{-1}(Z)$ 上の $-2s-2$ 次斉次正則函数のなす複素線形空間を（第3章で解説する層の記号を用いて）$\Gamma(Z,\mathcal{O}(-2s-2))$ という記号で表し，余境界（コバウンダリ）演算子と呼ばれる線形写像

$$\delta : \Gamma(U_0,\mathcal{O}(-2s-2)) \oplus \Gamma(U_1,\mathcal{O}(-2s-2)) \ \rightarrow \ \Gamma(U_0 \cap U_1,\mathcal{O}(-2s-2))$$

を

$$\delta(g_0,g_1) = g_1 - g_0$$

と定義して，$f \sim f + g_1 - g_0$ に関する同値類 $[f]$ を

$$[f] \in \Gamma(U_0 \cap U_1,\mathcal{O}(-2s-2))/\operatorname{Im}\delta \tag{2.76}$$

と解釈する．この商線形空間は $H^1(U,\mathcal{O}(-2s-2))$ という記号で表される層係数コホモロジー群を U_0,U_1 という開集合の組によって実現した「チェックコホモロジー」に他ならない[†13]．コホモロジー群自体はこのような具体的な実現の仕方によらないものとして定式化される．同じコホモロジー群を U_0,U_1 とは異なる開集合の組によるチェックコホモロジーとして扱うことは周回積分の設定を（一般には複数の被積分函数・積分路を含む，より複雑なものに）変えることに相当する．

さらに，積分表示の周回積分を Γ_x 上の面積分に書き直して「ドルボーコホモロジー」と呼ばれる別種のコホモロジー群の言葉で解釈することもできる．このことを見るために，U 上の U_0,U_1 に関する1の分解（partition of unitiy）[†14]χ_0, χ_1 を利用する．すなわち χ_α（$\alpha = 0,1$）は U 上の C^∞ 級函数であって

1. $\operatorname{supp}\chi_\alpha \subset U_\alpha$
2. $\chi_0 + \chi_1 = 1$

という条件を満たすものとする．ここで $\operatorname{supp}\chi_\alpha$ は χ_α の台（support）すなわち $\{[\xi] \in U \mid \chi_\alpha([\xi]) \neq 0\}$ の閉包を表す．これを用いて

$$h_0 = -\chi_1 f, \quad h_1 = \chi_0 f$$

[†13] 厳密に言えば，これが成り立つためには U,U_0,U_1 の選び方に函数論的な制約が生じる．
[†14] 参考文献 [120] を参照されたい．

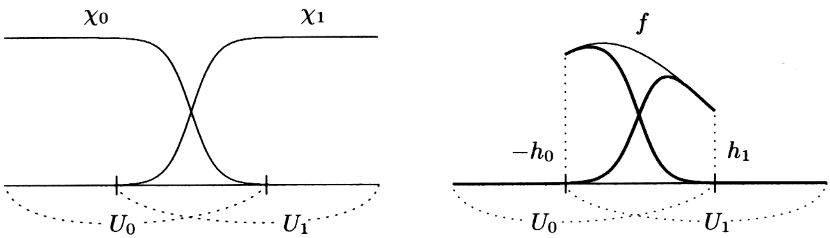


図 2.13　f を U_0, U_1 上の C^∞ 級函数の差として表す

という函数の組を導入する．f 自体は $\rho^{-1}(U_0 \cap U_1)$ 上でのみ定義されているが，h_α は $\rho^{-1}(U_0 \cap U_1)$ の外で恒等的にゼロの函数として延長することによって $\rho^{-1}(U_\alpha)$ 上の C^∞ 級 $-2s-2$ 次斉次函数と見なすことができる．これらを用いて f を

$$f = h_1 - h_0$$

という形に表すことができる（図 2.13）．前述の余境界演算子 δ の言葉で言えば，正則函数という条件を C^∞ 函数にまで緩めることによって f を $f = \delta(h_0, h_1)$ というコバウンダリとして表したことになる．

f に対するこの表示を無質量自由場の積分表示に代入して周回積分を面積分に書き直す．ここで鍵となるのは積分路 C_x をその内側の領域 $\Delta_{0,x}$（U_0 に含まれる）あるいは外側の領域 $\Delta_{1,x}$（U_1 に含まれる）の境界 $\partial\Delta_{\alpha,x}$ と見なすことにある．向きを考慮すれば

$$C_x = \partial\Delta_{0,x} = -\partial\Delta_{1,x}$$

となるから，微分形式に関するストークスの定理[†15]を利用して h_α を含む周回積分を

$$\begin{aligned}\oint_{C_x} \lambda_{\dot{a}_1} \cdots \lambda_{\dot{a}_{2s}} h_\alpha \frac{\lambda_{\dot{b}} d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} &= \pm \int_{\Delta_{\alpha,x}} d\left(\lambda_{\dot{a}_1} \cdots \lambda_{\dot{a}_{2s}} h_\alpha \frac{\lambda_{\dot{b}} d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i}\right) \\ &= \pm \int_{\Delta_{\alpha,x}} \lambda_{\dot{a}_1} \cdots \lambda_{\dot{a}_{2s}} \bar{\partial} h_\alpha \wedge \frac{\lambda_{\dot{b}} d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i}\end{aligned}$$

[†15] 参考文献 [120] を参照されたい．

というように面積分に書き直すことができる．ここで $\bar{\partial}$ は微分形式に作用する $\bar{\partial}$ 演算子である（その定義と基本的な性質については第 3 章を参照されたい）．符号 $\pm$ は $\alpha = 0$ のとき $+$，$\alpha = 1$ のとき $-$ となる．自由場の値 $\psi_{\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_{2s}}(x)$ はこれらの面積分の差に等しい．ところで，f は $\rho^{-1}(U_0 \cap U_1)$ 上の正則函数だから，その上では

$$\bar{\partial} h_1 - \bar{\partial} h_0 = \bar{\partial} f = 0$$

という等式が成立する．したがって $\rho^{-1}(U)$ 上の $(0,1)$ 型微分形式 ω を

$$\omega = \begin{cases} -\bar{\partial} h_0 & (\rho^{-1}(U_0) \text{ において}) \\ -\bar{\partial} h_1 & (\rho^{-1}(U_1) \text{ において}) \end{cases}$$

と定義することができる．定義より明らかに

$$\bar{\partial} \omega = 0$$

すなわち ω は $\bar{\partial}$ 閉（$\bar{\partial}$-closed）である（ちなみに，ω の台 $\mathrm{supp}\ \omega$ が $\rho^{-1}(U_0 \cap U_1)$ に含まれていることにも注意されたい）．こうして，上の面積分は Γ_x 上の（符号を別にすれば）共通の微分形式を部分領域 $\Delta_{\alpha,x}$ で積分したものである，ということがわかった．両者をまとめて，最終的に無質量自由場の面積分表示

$$\psi_{\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_{2s}}(x) = \int_{\Gamma_x} \lambda_{\dot{a}_1} \cdots \lambda_{\dot{a}_{2s}} \frac{\omega \wedge \lambda_{\dot{b}} d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} \tag{2.77}$$

が得られる．

以上の構成において ω は 1 の分解の選び方に由来する任意性を含んでいるが，ていねいに調べればわかるように，この任意性は $\rho^{-1}(U)$ 上の C^∞ 級函数 u によって ω を $\omega + \bar{\partial} u$ に変えることに限られる．これによって前述の面積分の値は変わらないので，無質量自由場の面積分表示は $\omega \sim \omega + \bar{\partial} u$ という同値関係の同値類 $[\omega]$ に対して定義されるものと考えてよい．第 3 章で説明する記号を用いれば，ω と u はそれぞれ $\Gamma(U, \mathcal{A}^{0,1}(H^{\otimes(-2s-2)}))$ ならびに $\Gamma(U, \mathcal{A}^{0,0}(H^{\otimes(-2s-2)}))$ という複素線形空間の要素であり，$\omega \sim \omega + \bar{\partial} u$ に関する同値類 $[\omega]$ は

$$[\omega] \in \frac{\{\omega \in \Gamma(U, \mathcal{A}^{0,1}(H^{\otimes(-2s-2)})) \mid \bar{\partial}\omega = 0\}}{\{\bar{\partial}u \mid u \in \Gamma(U, \mathcal{A}^{0,0}(H^{\otimes(-2s-2)}))\}} \tag{2.78}$$

と解釈される．この商線形空間は $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(U, H^{\otimes(-2s-2)})$ というドルボーコホモロジー群に他ならない．

コホモロジーの言葉を用いれば，被積分函数の設定や積分路・被積分函数の選び方の違いなどの個別的状況をコホモロジー類の中に吸収して統一的で見通しのよい定式化を与えることが可能になる．そのような定式化ができれば，より困難な問題（たとえば，自由場方程式のすべての解が積分表示によって得られるかどうかを問う）に取り組むこともできる．コホモロジー的な見方は令室量自由場の積分表示に限らずツイスター理論のさまざまな拡張を考える際にも有用である．

覚え書き

1. ペンローズはツイスター理論に関する最初の論文 [66] の中で，ナル直線の記述から出発してツイスター空間を導入し，ポアンカレ群や共形群の作用がツイスターの言葉に翻訳できることを示すとともに，ロビンソンの定理やカーの定理も論じている．そのあとの論文 [67, 68] では無質量自由場の積分表示を扱っている．マッカラムとの共著の解説 [74] はこの頃までの研究成果（そこには有質量場や量子化への試みも含まれている）をまとめたものである．その後ツイスター理論の研究は積分表示のコホモロジー的解釈 [69, 71, 107]，ある種のゲージ場 [94] や重力場 [70] への拡張などの重要な進展を経て新たな段階に入ったと言えるだろう．ペンローズはこの頃書いた「ツイスタープログラム」と題する解説 [72] の中で，複素構造に基づいて物理を記述する，というツイスター理論の目標を打ち出している．ちなみに，この解説では記号の使い方もその後のツイスター理論で慣用となるものに固まっている．
2. ツイスター理論ではツイスターの成分を $\omega^A, \pi_{A'}$ という記号で表すのが普通であるが，本書ではこの伝統的な ω, π の代わりに μ, λ という記号を用いることにした．λ, μ はスペクトルを連想させる変数であり，いろいろな点でツイスターの実質的意味をむしろよく象徴すると思われるからである．その他にも，添字の記号を始めとして，ツイスター理論の慣用の記号や定義などを少し変えた箇所があるので，他の文献と読み比べる際には注意されたい．なお，ペンローズの最初期の

論文の記号の使い方もその後ツイスター理論で定着したものとはかなり異なる．

3. ペンローズの初期の論文には旗多様体が登場しない．旗多様体を積極的に用いてツイスター理論を定式化することはウェルズの論文 [103] に始まるようである．ウェルズはペンローズの幾何学的設定のわかりにくかった部分を明快な形に整理し直し，正則線形束やドルボーコホモロジーなど複素幾何学の道具立てを積極的に用いて無質量自由場の積分表示を再構成した．ウェルズの研究は，その少し前に登場したアティヤとウォードの反自己双対ゲージ場に関する研究 [5, 95] とともに，ツイスター理論が純数学的な題材としても興味深いものであることを広く認識させる契機となった．
4. ツイスター理論の解説書には Hughston [43]，Huggett-Tod [42]，Penrose-Rindler [76]，Ward-Wells Jr. [102]，Baston-Eastwood [8], Mason-Woodhouse [62] などがある．それぞれ題材の選び方に特色がある．Hughston [43] は素粒子論への応用をめざす研究の解説書で，有質量場や現象論的模型の取扱いに詳しい．Huggett-Tod [42] は書名どおりの入門書であり，ミンコフスキー時空上の無質量自由場の取扱いを中心にしてツイスター理論の基礎をていねいに解説している．Penrose-Rindler [76] は 2 巻本の第 2 巻であるが，第 1 巻 [75]（スピナー形式による時空と場の記述を扱っている）と併せて読む必要がある．Ward-Wells [102] は筆者らの記念碑的論文 [5, 95, 103] によって装いを新たにしたツイスター理論の姿を紹介している．Baston-Eastwood [8] はツイスター理論から派生した表現論的問題を扱っている．Mason-Woodhouse [62] はツイスター理論と可積分系との関係に関する研究を詳しく紹介している．これらの解説書の他に，ツイスター理論に関する論文集や研究会報告集として Lerner-Sommers 編 [55], Hughston-Ward 編 [44]，Doebner-Palev 編 [19]，Baily-Baston 編 [6]，Mason 他編 [56, 57, 58] などがある．
5. *Twistor Newsletters* はツイスター理論の研究者の同人誌というべきもので，小冊子の形態で年に数回不定期に発行されてきた．*Twistor Newsletters* は通常の論文誌に比べて入手・閲覧が難しいが，Hughston-Ward 編 [44]，Mason 他編 [56, 57, 58] の各論文集にその内容が再録されている．ちなみに，この小冊子の表紙はペンローズ自身の手描きによると思われるロビンソン叢の図で飾られているが，この図はペンローズとリンドラーの著書 [76] の図 6-3 と同じものである．この図を用いた説明の中に，ツイスター（twistor）という言葉は流線のねじれた様子に由来する，という趣旨の註釈がある．
6. ギンディキンは *Mathematical Intelligencer* に掲載された記事 [29] でツイスターの概念の起源を射影幾何学の長い歴史の中に位置づけている．射影幾何学の歴史

は 17 世紀の建築家デザルグ（G. Desargues）に始まり，19 世紀のプリュッカー（J. Plücker）とクライン（F. Klein）の直線幾何学（line geometry）に到る．その頃の研究の状況はクラインによる 19 世紀数学の概説 [49] から知ることができる．直線幾何学はクライン対応（正確にはプリュッカー–クライン対応と呼ぶべきであろう）から派生するさまざまな幾何学的問題を扱うものである（グリフィスとハリスの代数幾何学の教科書 [33] には現代的な立場からの解説がある）．ギンディキンの見解によれば，ペンローズはこの 19 世紀的題材の中に相対論的時空幾何学という新たな意味を見出した，ということになる．ちなみに，リー群論の開祖であるリー（S. Lie）はクラインと同世代の数学者で，クラインと幾何学・群論に関する共同研究を行っている．この共同研究は今日ではリー群論の源流と見なされているが，リーとクラインが追求した問題は直線幾何学とも深く関わるものだった．“Erlangen Programm” として知られるクラインの有名な教授就任講演においても直線幾何学に由来する題材が登場する．

第3章

層と複素多様体

層の概念はカルタン（H. Cartan）が代数的位相幾何学におけるルレイ（J. Leray）の研究や多変数複素函数論における岡（K. Oka）の「不定域イデアル」の方法を整理統合するため 1940 年代末に導入したもので，その後の複素幾何学や代数幾何学において広く用いられるようになった．

層の考え方の源流はワイエルシュトラス（K. Weierstrass）が 1 変数複素函数論の厳密な構成に用いた方法にまで遡ると言えるだろう．ワイエルシュトラスは収束べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ を基本的な要素（函数要素）と見なして，それを解析接続によって次々につないでできるものとして複素解析函数を定義した．ワイエルシュトラス流の定義はコーシー–リーマン方程式に基づく複素解析函数（すなわち正則函数）の定義とは対照的で，むしろ層の概念を先取りしている．実際，層の言葉に翻訳すれば，すべての函数要素（今日的な言葉で言えば解析函数の「芽」）を集めた集合 $\mathcal{F}$ が層に他ならない．この集合にはある位相構造が導入される．函数要素に中心 c を対応させることによって射影 $\varpi : \mathcal{F} \to X$ ができるが，直観的に言えば $\mathcal{F}$ の開集合は射影 $\varpi : \mathcal{F} \to X$ に関して横方向にのみ拡がっていて，垂直方向は離散的である．この射影写像の断面，すなわち X の開集合 U から $\mathcal{F}$ への連続写像 $s : U \to \mathcal{F}$ で $\varpi \circ s = \mathrm{id}_U$ という条件[†1]を満たすものを考えることが解析接続に相当する．要するに，層では函数を函数要素がつながった「面」と見るのである（それを徹底すれば複素解析函数のリーマン面になる）．位相空間としての層は，いわばあらゆる複素解析函数のリーマン面がシート状に積み重なったような，途方もない代物になる．

この章では層の概念を基礎から解説し，例として一般の複素多様体上の函数・微分

[†1] 一般に $f \circ g$ は f, g の合成写像，id_X は X から X の恒等写像を表す．すなわち，$f \circ g(x) = f(g(x))$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ である．

形式・正則線形束に関連する層を取り上げる．最後に，ツイスター空間と関わりの深い複素射影空間と複素グラスマン多様体について詳しく論じる．

1 集合の層

層（sheaf）を定義するには二通りの流儀がある．一つは位相空間（後述する層空間）として定義するものである．これは数学的に簡潔で，一般的な性質や概念を論じるためにも欠かせないが，抽象的であまりわかりやすくない．もう一つは前層（presheaf）と呼ばれる構造から出発する流儀で，多様体上の具体的な層を扱うときにはこちらの方が便利でわかりやすい．この二つの流儀は同値であるが，以下では前層から出発する流儀を採用する．

コホモロジーの定式化に用いられるのはアーベル群などの代数構造を備えた層であるが，ここでは代数構造を仮定しない集合の層の概念を説明する．

1.1 集合の前層

前層（および層）を考える舞台として位相空間 X を一つ選んで話を進める．これを底空間（base space）と呼ぶ．X の開集合系（すなわちすべての開集合からなる集合）を $\mathfrak{O}_X$ という記号で表す．

定義 各 $U \in \mathfrak{O}_X$ に対してある集合 $\mathcal{F}(U)$ が対応し，さらに包含関係 $V \subseteq U$ にある $U, V \in \mathfrak{O}_X$ に対して写像 $r_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が定義されていて

1. $W \subseteq V \subseteq U$ ならば $r_{WV} \circ r_{VU} = r_{WU}$
2. $r_{UU} = \mathrm{id}_U$

という条件を満たすとき，この対応 $\mathcal{F} : U \mapsto \mathcal{F}(U)$ [†2]あるいは集合族 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ を集合の前層（presheaf of sets）という．$\mathcal{F}(U)$ の要素を $\mathcal{F}$ の U 上の断面（section），r_{VU} を制限写像（restriction mapping）という．

注意 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $r_{VU}(s)$ を $s|_V$ という記号でも表すことにすると便利なの

[†2] 写像と混同しないため集合間の写像を表す記号 $\to$ ではなくて要素間の対応を表す記号 $\mapsto$ を用いていることに注意されたい．要するに $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{O}_X$ からすべての集合の集まり Sets（有名なラッセルのパラドックスによって Sets 自体は集合になり得ない）への写像である．圏論的に見れば，$\mathfrak{O}_X$ と Sets はそれぞれ圏（category）の構造をもち，前層はそれらの間の反変函手（contravariant functor）と解釈できる．

で，以後この記号法

$$s|_V = r_{VU}(s)$$

も併用する．

例 1 X を位相空間，F を集合とする．各 $U \in \mathfrak{O}_X$ に対して F を対応させ，制限写像を $r_{VU}(f) = f$ （$f \in F$）と定義するとき，集合族 $F_X = \{F\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ は前層となる．

例 2 X, F を位相空間とする．各 $U \in \mathfrak{O}_X$ に対して U から F への連続写像 $f : U \to F$ 全体のなす集合 $C(U, F)$ を対応させて，制限写像を $r_{VU}(f) = f|_V$ （連続写像の V への制限）と定義すれば，集合族 $C_X(F) = \{C(U, F)\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ は前層となる．

1.2 集合の層

位相空間 X の開集合 U に対して $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ となるような開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を U の開被覆（open covering）という[†3]．

定義 前層 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ が次の条件を満たすとき，集合の層（sheaf of sets）であるという：

1. $U \in \mathfrak{O}_X$ と $s, t \in \mathcal{F}(U)$ に対して U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在してすべての $\alpha \in A$ に対して $s|_{U_\alpha} = t|_{U_\alpha}$ が成立すれば，$s = t$ となる．
2. $U \in \mathfrak{O}_X$ と U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ならびに $s_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ に対して $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \Longrightarrow s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ が成立すれば，ある $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在してすべての $\alpha \in A$ に対して $s_\alpha = s|_{U_\alpha}$ となる．

注意 上の定義における二つの条件を局所性条件（locality conditions）という．前者は後者における s が一意的であることを保証する．

例 1 すでに示した前層の例 $F_X, C_X(F)$ はともに局所性条件を満たし，層と

[†3] より一般に，X の部分集合 S に対して $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ （等号は一般には成り立たない）となるような開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を S の開被覆という．S が開集合であれば $S \cap U_\alpha$ を改めて U_α と定義し直すことによって等号が成り立つようにできる．

なる．特に F_X を定数層（constant sheaf）という．

例 2　位相空間 X から Y への連続写像 $f : X \to Y$ と X 上の集合の層 $\mathcal{F}$ が与えられているとする．このとき

$$V \in \mathfrak{O}_Y \ \mapsto \ \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

という対応（f の連続性によって逆像 $f^{-1}(V)$ は X の開集合となる）と制限写像 $r_{f^{-1}(W)f^{-1}(V)} : \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(W))$ （$W \subset V$）によって Y 上の前層が得られるが，これは局所性条件を満たして層となる．この層を f による $\mathcal{F}$ の順像（direct image）と呼び，$f_*\mathcal{F}$ という記号で表す．

1.3　層空間

位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ から以下のようにして位相空間 $\tilde{\mathcal{F}}$ を構成する．

1. X の各点 x に対して x の開近傍系

$$\mathfrak{O}_X(x) = \{U \in \mathfrak{O}_X \mid x \in U\}$$

が決まる．$\mathcal{F}(U)$ の $U \in \mathfrak{O}_X(x)$ にわたる合併集合において同値関係 $s \sim s'$ を

$$s \sim s' \iff \text{ある } U'' \in \mathfrak{O}_X(x) \text{ に対して } s|_{U''} = s'|_{U''} \tag{3.1}$$

という条件で定義し，同値な要素同士を同一視することによって定まる商集合

$$\mathcal{F}_x = \bigcup_{U \in \mathfrak{O}_X(x)} \mathcal{F}(U) \,/ \sim \tag{3.2}$$

を考える．これを x における $\mathcal{F}$ の茎（stalk）という．$s \in \mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{F}_x$ において定める同値類を s の x における芽（germ）と呼び，s_x という記号で表す．

2. $x \in X$ 全体にわたる茎の合併集合

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x \tag{3.3}$$

を考える．$U \in \mathfrak{O}_X$ と $s \in \mathcal{F}(U)$ によって

$$\tilde{U}_s = \{s_x \mid x \in U\} \tag{3.4}$$

と表せる部分集合 $\tilde{U}_s$ を $\tilde{\mathcal{F}}$ の開集合と定める[†4]ことによって $\tilde{\mathcal{F}}$ に位相空間の構造を入れる．

3. 写像 $\varpi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ を

$$\varpi(s_x) = x \tag{3.5}$$

と定義する．

注意 帰納的極限（inductive limit）の言葉を用いれば，上の $\mathcal{F}_x$ の定義は

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim \mathcal{F}(U) \quad (U \in \mathfrak{O}_X(x) \text{ の制限に関する帰納的極限}) \tag{3.6}$$

と書ける．言い換えれば，上の定義はこの帰納的極限を具体的に説明したものになっている．□

$\varpi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ は次のような性質をもつ．

補題 3.1 各 $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}$ に対して $\tilde{s}$ の開近傍 $\tilde{V}$ が存在して ϖ の $\tilde{V}$ への制限 $\varpi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \varpi(\tilde{V})$ は同相写像である．

証明 X のある点 x とその開近傍 U における断面 $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在して，$\tilde{s}$ は x における s の芽 s_x に等しい．$\tilde{V}$ として (3.4) の $\tilde{U}_s$ を選べば補題の主張が成立する．□

この補題によって $\tilde{\mathcal{F}}$ は次の意味で層空間になっていることがわかる．これを前層 $\mathcal{F}$ に付随する層空間と呼ぶ．また，$\mathcal{F}$ から $\tilde{\mathcal{F}}$ を構成することを層化という．

定義 位相空間 $\mathcal{E}$ から X への写像 $\varpi : \mathcal{E} \to X$ が局所同相写像である（すなわち，$\mathcal{E}$ の各点 e に対してその開近傍 V が存在して，V への制限 $\varpi|_V : V \to \varpi(V)$ が同相写像となる）とき，$\mathcal{E}$ は ϖ を射影とする X 上の層空間（etale space）[†5]であるという（図 3.1）．X の開集合 U に対して U

[†4]正確に言えば，$\{\tilde{U}_s \mid U \in \mathfrak{O}_X,\ s \in \mathcal{F}(U)\}$ を開集合基（basis of open sets）として $\tilde{\mathcal{F}}$ の開集合系 $\mathfrak{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ を定める．

[†5]「etale（エタール）」は仏語の「étale」に由来する．

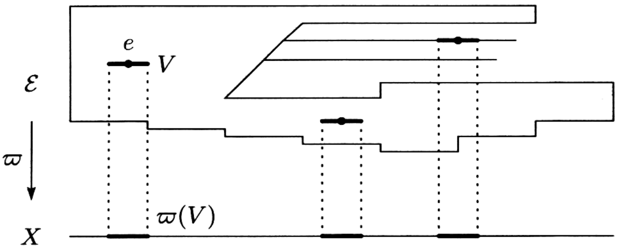


図 3.1　層空間とその各点の近傍

から $\mathcal{E}$ への連続写像 $s : U \to \mathcal{E}$ で $\varpi \circ s = \mathrm{id}_U$ という条件を満たすものを $\mathcal{E}$ の U 上の断面という．U 上のすべての断面からなる集合を $\Gamma(U, \mathcal{E})$ という記号で表す．□

層空間は前述の意味での（すなわち局所性条件を満たす前層としての）層と以下のように1対1に対応している．まず，次の補題（断面の連続写像としての特徴からただちにわかる）によって層空間には層が付随することがわかる．

補題 3.2　層空間 $\mathcal{E}$ に対してその開集合上の断面集合の族 $\{\Gamma(U, \mathcal{E})\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ は局所性条件を満たす前層である．

逆に，局所性条件を満たす前層 $\mathcal{F}$ が与えられたとする．それに付随する前述の層空間 $\tilde{\mathcal{F}}$ を考える．ここで $s \in \mathcal{F}(U)$ を任意に与えれば，U の各点 x に芽 $s_x \in \tilde{\mathcal{F}}_x$ を対応させることによって，この層空間の U 上の断面 $x \mapsto s_x$ が決まる．これは写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}}) \\ s & \mapsto & (x \mapsto s_x) \end{array} \tag{3.7}$$

を定める．これに関して次のことが成立する．

補題 3.3　$\mathcal{F}$ が局所性条件を満たせば，この写像 (3.7) は全単射である．

証明　単射性は局所性条件の前半から従う．全射性を確かめるために，$\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ の要素 $\tilde{s}$ が任意に与えられたとする．U の各点 x において $\tilde{s}(x)$ は $\mathcal{F}_x$ の要素

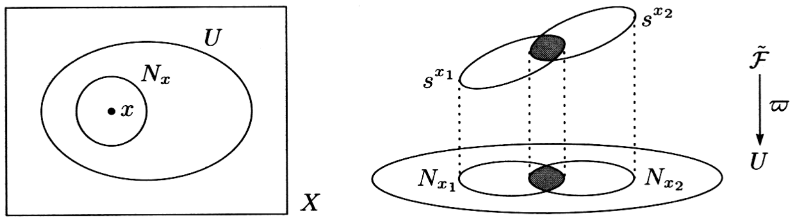


図 3.2 s^x の定義域と貼り合せ

であるから，x のある開近傍 $N_x \subseteq U$ とその上の $\mathcal{F}$ の断面 $s^x \in \mathcal{F}(N_x)$ [†6]が存在して

$$\tilde{s}(x) = (s^x)_x \quad (s^x \text{ の } x \text{ における芽})$$

となる（図 3.2）．ϖ は局所同相写像であるから，必要ならば N_x を小さく選び直すことによって，ϖ の $\tilde{N}_x = \{(s^x)_{x'} \mid x' \in N_x\}$ （$\tilde{\mathcal{F}}$ における $\tilde{s}(x)$ の開近傍）への制限 $\varpi|_{\tilde{N}_x}$ は N_x への同相写像となる．このようにして得られた U の開被覆 $\{N_x\}_{x\in U}$ と $\mathcal{F}$ の局所断面の族 $\{s^x\}_{x\in U}$ に対して局所性条件の後半が適用できることを示そう．$N_{x_1} \cap N_{x_2} \neq \emptyset$ であるとする．ϖ の $\tilde{N}_{x_1} \cap \tilde{N}_{x_2}$ への制限は $N_{x_1} \cap N_{x_2}$ への同相写像であり，$\tilde{s}$ の $N_{x_1} \cap N_{x_2}$ への制限はその逆写像と見なせるから，

$$(s^{x_1})_x = \tilde{s}(x) = (s^{x_2})_x \quad (x \in N_{x_1} \cap N_{x_2})$$

が成立する（図 3.2）．特に s^{x_1} と s^{x_2} の $N_{x_1} \cap N_{x_2}$ への制限が一致する．したがって局所性条件の後半が適用できて，$\mathcal{F}(U)$ の要素 s で

$$s|_{N_x} = s^x \quad (x \in U)$$

となるものが存在する．x における芽を考えれば

$$s_x = (s^x)_x = \tilde{s}(x) \quad (x \in U)$$

が成立する．このようにして (3.7) の全射性もわかる．□

[†6] 記号が紛らわしいので注意されたい．s^x における x は単なるラベルであり，各 $x \in U$ に対して選んだ $\mathcal{F}(N_x)$ の要素であることを示している．これに対して s_x や $(s^x)_x$ はそれぞれ s, s^x の x における芽を表す．

以上のことから層と層空間は1対1に対応することがわかる．以後は両者を同じものの二通りの表現と考えて同一視し，特に必要でない限り両者を記号上区別しないことにする．

他方，局所性条件を満たさない前層については $\mathcal{F}(U)$ と $\Gamma(U,\tilde{\mathcal{F}})$ を同一視することはできない．しかしながら，自然に現れる層の中には，局所性条件を満たさない前層から出発して層化の手順を経て定義されるものも少なくない．

例 位相空間 X から Y への連続写像 $f:X\to Y$ と Y 上の集合の層 $\mathcal{G}$ が与えられているとする．f が開写像，すなわち X の任意の開集合 U に対してその像 $f(U)$ が Y の開集合であれば，$U\in\mathfrak{O}_X$ に対して $\mathcal{G}(f(U))$ を対応させ，U から V への制限写像を $r_{f(V)f(U)}:\mathcal{G}(f(U))\to\mathcal{G}(f(V))$ で定義することによって X 上の前層が得られる．この前層は一般には局所性条件を満たさない．これを層化したものを f による $\mathcal{G}$ の逆像（inverse image）と呼び，$f^{-1}\mathcal{G}$ という記号で表す．X の各点 x における茎は

$$f^{-1}\mathcal{G}_x=\mathcal{G}_{f(x)}$$

となる．特に，Y の各点 y の逆像 $f^{-1}(y)$ に沿って同じ茎が並ぶ．したがって，$U\in\mathfrak{O}_X$ とこれらの逆像の交差 $U\cap f^{-1}(y)$ がどの y に対しても連結であれば

$$\Gamma(U,f^{-1}\mathcal{G})=\Gamma(f(U),\mathcal{G})$$

という等式が成立する．$U\cap f^{-1}(y)$ が連結でなければ，連結成分ごとに独立に芽をつないだ断面が可能になるので，一般には

$$\Gamma(U,f^{-1}\mathcal{G})\neq\Gamma(f(U),\mathcal{G})$$

となる．

注意 層の逆像は f が開写像でない場合にも定義できる．その場合には $U\in\mathfrak{O}_X$ に対して $f(U)$ を含む $W\in\mathfrak{O}_Y$ の制限に関する $\mathcal{G}(W)$ の帰納的極限 $\varinjlim\mathcal{G}(W)$ を考えて，

$$U\in\mathfrak{O}_X\ \mapsto\ \varinjlim\mathcal{G}(W)\quad(W\in\mathfrak{O}_Y,\,W\supseteq f(U))$$

という対応によって前層を定義し，それを層化したものとして $f^{-1}\mathcal{G}$ を定義する．はじめから層空間として考えるならば，$f:X\to Y$ と $\varpi:\mathcal{G}\to Y$ のファイバー積（fiber product）

$$X \underset{Y}{\times} \mathcal{G} = \{(x,s) \in X \times \mathcal{G} \mid f(x) = \varpi(s)\} \tag{3.8}$$

として $f^{-1}\mathcal{G}$ を定義することもできる．

1.4　準同型

定義　前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ において，各開集合 $U \in \mathfrak{O}_X$ ごとに写像 $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が定義され，包含関係 $V \subseteq U$ にある任意の開集合 U, V に対して

$$\phi_V \circ r^{\mathcal{F}}_{VU} = r^{\mathcal{G}}_{VU} \circ \phi_U$$

という条件（ここで $r^{\mathcal{F}}_{VU}$ と $r^{\mathcal{G}}_{VU}$ はそれぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ における制限写像である）を満たすとき，写像族 $\phi = \{\phi_U\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ は前層の準同型（homomorphism）であるという．このことを記号的に $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ あるいは $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ と表す．特に，各 U に対して ϕ_U が全単射であるとき，ϕ を前層の同型（isomorphism）という．またそのような ϕ が存在するとき，前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は同型であるという．そのことを記号的に $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$ と表す．□

以上の定義はそのまま層にも適用される．定義に基づいて容易に確かめられることをいくつか掲げておく．

補題 3.4　$\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ および $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が前層の準同型であれば，

$$\psi \circ \phi = \{\psi_U \circ \phi_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{G}(U)\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$$

という写像族は $\mathcal{E}$ から $\mathcal{G}$ への前層の準同型となる．

補題 3.5　前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に付随する層空間を $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}}$，それぞれの X への射影を $\varpi^{\mathcal{F}}, \varpi^{\mathcal{G}}$ という記号で表す．このとき，前層の準同型 $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ は茎の間の写像

$$\tilde{\phi}_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

を介して層空間の間の連続写像 $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ で

$$\varpi^{\mathcal{G}} \circ \tilde{\phi} = \varpi^{\mathcal{F}}$$

という条件を満たすものを定める．さらに，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が層であれば，その間の準同型 $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とこの条件を満たす連続写像 $\tilde{\phi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ は 1 対 1 に対応する．

2 代数構造をもつ層

層係数コホモロジーの定義に用いられるのはアーベル群（可換群）の構造をもつ層である．この他にもさまざまな代数構造をもつ層を考えることができる．通常の代数構造における準同型に対応して層においても代数構造を保つ層準同型の概念がある．アーベル群において考えられる直和，部分群，商群などの概念，ならびその準同型に伴う核，余核，像，余像などの概念はいずれもアーベル群の層に対して拡張される．これらに基づいて完全系列と複体の概念を考えることができる．

2.1 アーベル群の前層と層

ここでも底空間 X を一つ選んで話を進める．以下特に断らない限り，アーベル群の演算を加法として扱うことにする．単位元は零元 0 と解釈される．零元のみからなるアーベル群を 0 という記号で表す[†7]．

定義 集合の前層 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U)\}_{U\in\mathfrak{O}_X}$ において次の条件が満たされるとき，$\mathcal{F}$ はアーベル群の前層（presheaf of abelian groups）であるという：

1. 各開集合 $U \in \mathfrak{O}_X$ 上の断面の集合 $\mathcal{F}(U)$ は加法 $+ : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ に関するアーベル群である[†8]．
2. 各制限写像 r_{VU} はアーベル群の準同型である．すなわち，任意の $s, t \in \mathcal{F}(U)$ に対して $r_{VU}(s+t) = r_{VU}(s) + r_{VU}(t)$ が成立する．

アーベル群の前層が局所性条件を満たすとき，アーベル群の層（sheaf of abelian groups）という．

注意 アーベル群以外の代数構造をもつ前層や層も同様にして定義される．すなわち，$\mathcal{F}(U)$ に所要の代数構造をもたせて，制限写像 r_{VU} がそれに関する準同型であることを要求すればよい．

例1 X を位相空間，F をアーベル群とするとき，F 値定数層 $F_X = \{F\}_{U\in\mathfrak{O}_X}$ はアーベル群の層となる．

[†7] 本来は $\{0\}$ と書くべきであるが，習慣上 0 と表すことが多い．

[†8] この定義では $U = \emptyset$ の場合が問題になるが，通常は $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$（零元だけからなるアーベル群）と定義する．単なる集合の前層では空集合上の断面について特別な指定はない．

例2　X を位相空間とするとき，$\boldsymbol{R}$ 値連続函数の層 $C_X(\boldsymbol{R}) = \{C(U, \boldsymbol{R})\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ と $\boldsymbol{C}$ 値連続函数の層 $C_X(\boldsymbol{C}) = \{C(U, \boldsymbol{C})\}_{U \in \mathfrak{O}_X}$ はアーベル群の層となる．実際にはこれらは加法と乗法をもつ可換環の層である（すなわち，制限写像は可換環の準同型となる）．

例3　位相空間 X から Y への連続写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき，X 上のアーベル群の層 $\mathcal{F}$ の順像 $f_*\mathcal{F}$ は Y 上のアーベル群の層となる．また Y 上のアーベル群の層 $\mathcal{G}$ の逆像 $f^{-1}\mathcal{G}$ は X 上のアーベル群の層となる．アーベル群以外の代数構造をもつ層に関しても同様のことが言える．□

アーベル群について通常考えられる代数的概念の多くは自然にアーベル群の前層や層に拡張される．ただし，層に関しては微妙な問題が生じる場合がある．

i) 準同型

集合の前層の準同型の定義において，各開集合 U に対する写像 $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ をアーベル群の準同型に置き換えれば，アーベル群の前層（局所化条件が満たされていれば層）の準同型の定義になる．同型の概念も同様の意味で定義される．準同型 $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ の合成 $\psi \circ \phi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ もまた同じ意味での準同型になる．

ii) 零層

アーベル群 0 から得られる定数層を 0_X あるいは単に 0 という記号で表す．

iii) 直和

アーベル群の前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が与えられているとき，各開集合 U に対して $\mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ を対応させたものはアーベル群の前層となる．これを $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の直和と呼んで $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ という記号で表す．$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が層であれば直和 $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ も局所性条件を満たしてアーベル群の層となる．

iv) 部分前層・部分層

アーベル群の前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ において，各開集合 U に対する $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{G}(U)$ の部分アーベル群であるとき，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{G}$ の部分前層であるという．層の場合も同様で，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{G}$ の部分層であるという．

v) 商前層・商層

$\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ の部分前層であれば，各開集合 U に対して商アーベル群 $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ を対応させたものはアーベル群の前層となる．これを商前層という．$\mathcal{F},\mathcal{G}$ が層である場合でも，商前層は局所性条件を満たすとは限らない（これは後に議論する層係数コホモロジーの長完全系列と関係がある）．商前層を層化して得られる層を $\mathcal{F}$ による $\mathcal{G}$ の商層と呼び，$\mathcal{G}/\mathcal{F}$ という記号で表す．$\mathcal{G}/\mathcal{F}$ の定義に層化が必要であるため，その断面のアーベル群 $\Gamma(U,\mathcal{G}/\mathcal{F})$ は一般には $\Gamma(U,\mathcal{G})/\Gamma(U,\mathcal{G})$ と同型ではない．

vi) 核・余核・像・余像

アーベル群の前層の準同型 $\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ が与えられたとき，各開集合 U に対して準同型 $\phi_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ の核 $\operatorname{Ker}\phi_U=\{s\in\mathcal{F}(U)\mid\phi_U(s)=0\}$，像 $\operatorname{Im}\phi_U=\{\phi_U(s)\mid s\in\mathcal{F}(U)\}$，余核 $\operatorname{Coker}\phi_U=\mathcal{G}(U)/\operatorname{Im}\phi_U$，余像 $\operatorname{Coim}\phi_U=\mathcal{F}(U)/\operatorname{Ker}\phi_U$ を対応させたものはそれぞれアーベル群の前層となる．$\mathcal{F},\mathcal{G}$ が層であれば核は前層として局所性条件を満たして層となるが，それ以外は一般に層化を行って初めて層になる．こうして得られる層を ϕ の核，像，余核，余像と呼び，$\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Im}\phi$, $\operatorname{Coker}\phi$, $\operatorname{Coim}\phi$ という記号で表す．

注意　上に掲げた例の中で，層として定義するために層化の手続きを経なければならないものについては，層を層空間と考えることによって直接的な取扱いができる．たとえば商層の場合には，集合として

$$\mathcal{G}/\mathcal{F}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x \tag{3.9}$$

と定義し，自然な射影 $\mathcal{G}\to\mathcal{G}/\mathcal{F}$ が連続写像となるような最も細かい位相構造（すなわち商位相）を入れればよい（射影が局所同相写像になることは簡単な考察によって確かめられる）．また，これまでの定義のもとで，アーベル群の層の準同型 $\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ が茎に引き起こす準同型 $\phi_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ に関して

$$(\operatorname{Ker}\phi)_x=\operatorname{Ker}\phi_x,\qquad(\operatorname{Coker}\phi)_x=\operatorname{Coker}\phi_x,$$
$$(\operatorname{Im}\phi)_x=\operatorname{Im}\phi_x,\qquad(\operatorname{Coim}\phi)_x=\operatorname{Coim}\phi_x$$

という等式が成立する．そこで，逆に $\operatorname{Ker}\phi$, $\operatorname{Coker}\phi$, $\operatorname{Im}\phi$, $\operatorname{Coim}\phi$ をまず集合として

$$\operatorname{Ker}\phi = \bigcup_{x\in X} \operatorname{Ker}\phi_x, \quad \operatorname{Coker}\phi = \bigcup_{x\in X} \operatorname{Coker}\phi_x,$$
$$\operatorname{Im}\phi = \bigcup_{x\in X} \operatorname{Im}\phi_x, \quad \operatorname{Coim}\phi = \bigcup_{x\in X} \operatorname{Coim}\phi_x \tag{3.10}$$

と定義し，$\mathcal{G}/\mathcal{F}$ の場合にならって位相空間の構造を入れて層空間にしてもよい．

2.2　完全系列と複体

層係数コホモロジーの場合も含めて，ホモロジー代数全般で最も基本的な概念が完全系列と複体である．

まずアーベル群について完全系列と複体の概念を説明する．

定義　アーベル群 $A_0, \ldots, A_m$ とその間の準同型からなる系列

$$A_0 \xrightarrow{\phi_0} A_1 \xrightarrow{\phi_1} \cdots \xrightarrow{\phi_{m-1}} A_m$$

において

$$\operatorname{Im}\phi_{p-1} = \operatorname{Ker}\phi_p \quad (p = 1, \ldots, m-1) \tag{3.11}$$

という条件が満たされているとき，この系列は完全系列（exact sequence）であるという．

例　アーベル群の準同型 $\phi: A \to B$ について一般に次のことが成立する．

1. ϕ は単射 $\Longleftrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B$ は完全系列である．
2. ϕ は全射 $\Longleftrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$ は完全系列である．

ϕ が一般の準同型の場合には

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\phi \xrightarrow{i_1} A \xrightarrow{p_1} \operatorname{Im}\phi \longrightarrow 0 \tag{3.12}$$

および

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}\phi \xrightarrow{i_2} B \xrightarrow{p_2} \operatorname{Coker}\phi \longrightarrow 0 \tag{3.13}$$

という完全系列がある．ここで i_1, i_2 は部分群からの埋め込み，p_1, p_2 は商群へ射影を表す．もとの ϕ は

$$\phi = i_2 \circ p_1 \tag{3.14}$$

という準同型の合成として復元できる．この意味で上の二つの完全系列は準同型 ϕ を「分解」したものと見ることができる．与えられた準同型をこのように完全系列の組合せとして捉えることはホモロジー代数の基本的技巧の一つである．

定義

$$\cdots \longrightarrow C^{p-1} \xrightarrow{\phi_{p-1}} C^p \xrightarrow{\phi_p} C^{p+1} \longrightarrow \cdots$$

というように準同型 $\phi_p : C^p \to C^{p+1}$ で結ばれたアーベル群の系列 $\{C^p\}_{p\in\boldsymbol{Z}}$ において[†9]，すべての $p \in \boldsymbol{Z}$ に対して

$$\phi_p \circ \phi_{p-1} = 0 \tag{3.15}$$

言い換えれば

$$\operatorname{Im}\phi_{p-1} \subseteq \operatorname{Ker}\phi_p \tag{3.16}$$

という条件が満たされるとき，$\{C^p\}_{p\in\boldsymbol{Z}}$ をアーベル群の複体（complex of abelian groups）という．これから決まる商アーベル群

$$H^p = \operatorname{Ker}\phi_p / \operatorname{Im}\,\phi_{p-1} \tag{3.17}$$

を複体 $\{C^p\}_{p\in\boldsymbol{Z}}$ のコホモロジー群という．

注意　コホモロジー論ではある番号から左（さらには右）の C^p がすべて 0 に等しいような複体を考えることが多い．そのような複体は

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\phi_0} C^1 \xrightarrow{\phi_1} C^2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots$$

あるいは

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{\phi_0} C^1 \xrightarrow{\phi_1} C^2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-1}} C^n \longrightarrow 0$$

というように不要な 0 の部分を切り捨てて表示することにする．□

以上のことはアーベル群の層についてもそのまま当てはまる．完全系列の条件および複体の条件は底空間 X の各点 x における茎の準同型 $\phi_{p,x} : \mathcal{F}_{p,x} \to \mathcal{F}_{p+1,x}$

[†9] コホモロジー論の習慣に合わせて添字を上に付けている．

に対して

$$\operatorname{Im}\phi_{p-1,x} = \operatorname{Ker}\phi_{p,x} \tag{3.18}$$

あるいは

$$\operatorname{Im}\phi_{p-1,x} \subseteq \operatorname{Ker}\phi_{p,x} \tag{3.19}$$

が成立することに他ならない.

3 複素多様体上の函数・微分形式の層

複素多様体を層の観点から考えるにあたって最も基本なものは正則函数の層[†10]（構造層とも呼ばれる）である．それは可換環の構造をもつ．正則微分形式の層はこの可換環の上の加群の構造をもち，正則ドラーム複体と呼ばれる複体をなす．C^∞ 級微分形式の層のなす複体はドルボーコホモロジーやドラームコホモロジーを定義するために用いられる．

3.1 正則ドラーム複体

以下 X を n 次元複素多様体とする．空でない開集合 $U \subseteq X$ に対してその上の p 次正則微分形式からなる集合を $\Omega_X^p(U)$ という記号で表す[†11]．$\Omega_X^0(U)$ は U 上の正則函数全体の集合 $\mathcal{O}_X(U)$ に他ならない．これらが定める前層を Ω_X^p および $\mathcal{O}_X$ という記号で表す．局所性条件が満たされることは明らかなので，これらは層である．$\mathcal{O}_X(U)$ は正則函数の和と積に関して可換環であり，$\Omega_X^p(U)$ は正則函数と微分形式の積

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \Omega_X^p(U) & \to & \Omega_X^p(U) \\ (f,\omega) & \mapsto & f\omega \end{array}$$

[†10] 正則函数の芽の層ということもある．層空間は函数そのものではなくてその芽の集合である，ということを考えればその方が正確とも言えるが，以後は（芽のことを特に強調する必要がない限り）単に正則函数の層と呼ぶことにする．微分形式などの層についても同様の言葉遣いをする．

[†11] アーベル群の前層の定義のところで触れたように，$U = \emptyset$ の場合には零元のみからなるものとする．

によって $\mathcal{O}_X(U)$ の上の加群となる．この意味で $\mathcal{O}_X$ は可換環の層，Ω_X^p はその上の加群の層（$\mathcal{O}_X$ 加群の層）である．

局所座標系 $(z^1, \ldots, z^n)$ を用いて p 次正則微分形式 ω を

$$\omega = \omega_{i_1 \cdots i_p} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p}$$

と表すとき，係数 $\omega_{i_1 \cdots i_p}$ はもちろん局所座標の正則函数であるから，ω を外微分したもの

$$d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_p}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \tag{3.20}$$

は $p+1$ 次の正則微分形式となる．言い換えれば外微分は $d : \Omega_X^p(U) \to \Omega_X^{p+1}(U)$ という写像（複素線形写像）を定める．これは明らかに制限写像 $r_{VU} : \Omega_X^p(U) \to \Omega_X^p(V)$ と可換なので層準同型 $d : \Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1}$ を定める．実多様体上の C^∞ 級微分形式の外微分と同様に

$$d(d\omega) = 0 \tag{3.21}$$

という等式が成立するので

$$0 \longrightarrow \Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_X^n \longrightarrow 0 \tag{3.22}$$

という層の複体が得られる．これを正則ドラーム複体（holomorphic de Rham complex）という．これについて次のようなポアンカレの補題（Poincaré's lemma）の正則類似が成立する（証明は省くが，基本的には実多様体の場合のポアンカレの補題[†12]と同様である）．

定理 3.1（ポアンカレの補題の正則類似） 層の複体 (3.22) は左端を除いて完全系列である．左端に関しては

$$\mathrm{Ker}(d : \Omega_X^0 \to \Omega_X^1) = \boldsymbol{C}_X \quad（定数層） \tag{3.23}$$

となる．特に，(3.22) の左端に $\boldsymbol{C}_X$ を包含写像 ι で追加したもの

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{C}_X \xrightarrow{\iota} \Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_X^n \longrightarrow 0 \tag{3.24}$$

は層の完全系列である．

[†12] 参考文献 [120] を参照されたい．

正則ドラーム複体の変種として正則相対ドラーム複体がある．X, Y をそれぞれ n 次元・m 次元の複素多様体，$\pi : X \to Y$ を極大階数の（すなわち X の各点 x における接写像 $d\pi_x : T_x X \to T_{\pi(x)} Y$ が階数 m の線形写像であるような）全射正則写像とする．このとき正則相対微分形式（holomorphic relative differential form）の層 Ω_π^p（$p = 0, \ldots, l, l = n - m$）とその間を結ぶ相対外微分演算子（relative exterior differential operator）$d_\pi : \Omega_\pi^p \to \Omega_\pi^{p+1}$ が以下のように定義される[†13]．

適当な局所座標 $x^1, \ldots, x^n$ を選べば π は射影 $(x^1, \ldots, x^n) \to (x^1, \ldots, x^m)$ として表せる．これらの局所座標を 2 組に分けて

$$y = (x^1, \ldots, x^m), \quad z = (x^{m+1}, \ldots, x^n)$$

と表せば，z はファイバー方向の局所座標と見なせる．定義域の各点の近傍でこのような局所座標を用いて

$$\omega = \omega_{j_1 \cdots j_p}(y, z) dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p}$$

（$\omega_{j_1 \cdots j_p}(y, z)$ は (y, z) の正則函数である）という形に表せる微分形式を π に関する p 次正則相対微分形式という．要するにこれは π のファイバー方向の微分形式である．X の開集合 U に対して U 上の p 次正則相対微分形式の集合 $\Omega_\pi^p(U)$（これは $\mathcal{O}_X(U)$ 加群となる）を対応させることによって決まる層を Ω_π^p という記号で表す．これを局所座標に頼らず直接に

$$\Omega_\pi^p = \Omega_X^p / (\pi^{-1} \Omega_Y^1 \wedge \Omega_X^{p-1}) \quad (p > 0), \quad \Omega_\pi^0 = \mathcal{O}_X \tag{3.25}$$

と定義することもできる．むしろこれが正式な定義であり，上の座標表示はそれをわかりやすく言い換えたものにすぎない．この定義に従えば，ω に対して $dx^i \wedge \theta$ （$i = i, \ldots, m$）という形の微分形式を加えたもの $\omega + dx^i \wedge \theta$ も ω と同じ相対微分形式を表すことになる．さらに，底空間の局所座標 y を定数と見なしてファイバー方向の座標 z について外微分すること

$$d_\pi \omega = \frac{\partial \omega_{j_1 \cdots j_p}(y, z)}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \tag{3.26}$$

[†13] Ω_π^p, d_π を $\Omega_{X/Y}^p, d_{X/Y}$ という記号で表すことも多い．ここでは記号の簡潔さを尊重して前者を用いる．

によって層準同型 $d_\pi : \Omega_\pi^p \to \Omega_\pi^{p+1}$ が定まる．これは $d_\pi(d_\pi \omega) = 0$ という性質をもつので，層の複体

$$0 \longrightarrow \Omega_\pi^0 \xrightarrow{d_\pi} \Omega_\pi^1 \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} \Omega_\pi^l \longrightarrow 0 \tag{3.27}$$

が得られる．これを π に関する正則相対ドラーム複体（holomorphic relative de Rham complex）という．

この複体についてもポアンカレの補題の類似が成立し，左端の準同型以外の部分は完全系列である．左端の準同型の核は π のファイバーに沿って一定な正則函数の層，すなわち $\pi^{-1}\mathcal{O}_Y$ であるから，最終的に

$$0 \longrightarrow \pi^{-1}\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\iota} \Omega_\pi^0 \xrightarrow{d_\pi} \Omega_\pi^1 \xrightarrow{d_\pi} \cdots \xrightarrow{d_\pi} \Omega_\pi^l \longrightarrow 0 \tag{3.28}$$

という完全系列が得られる．

3.2 ドルボー複体とドルボーコホモロジー

今度は (p,q) 型 C^∞ 級微分形式のなす層を考えよう (p,q) 型微分形式とは，局所座標によって

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \cdots j_q} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

という形に表せるものをいう．係数は局所座標の C^∞ 函数である．空でない開集合 $U \subseteq X$ に対して U 上で定義された (p,q) 型 C^∞ 級微分形式からなる集合を $\mathcal{A}_X^{p,q}(U)$ という記号で表す[†14]．これはアーベル群の層 $\mathcal{A}_X^{p,q}$ を定める．この層には $\mathcal{A}_X^{0,0}$ すなわち C^∞ 級函数の層が作用するが，以下ではむしろその部分環の層である $\mathcal{O}_X$ の作用の方が本質的な意味をもつ．

(p,q) 型微分形式に対して $\bar\partial$ 演算子（$\bar\partial$ operator）の作用を

$$\bar\partial\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q} \tag{3.29}$$

と定義する．別の局所座標系 $(z'^1, \dots, z'^n)$ で ω を

$$\omega = \omega'_{i_1 \dots i_p j_1 \cdots j_q} dz'^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz'^{i_p} \wedge d\bar{z}'^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}'^{j_q}$$

[†14] シュワルツ超函数の理論で用いられる函数空間の記号を援用して $\mathcal{E}_X^{p,q}(U)$ という記号で表す場合もあるが，ここでは多様体論で一般的に用いられている記号法に従う．

と表せば，係数は微分同士の線形関係

$$dz'^i = \frac{\partial z'^i}{\partial z_j} dz^j, \quad d\bar{z}'^i = \frac{\partial \bar{z}'^i}{\partial \bar{z}^j} d\bar{z}^j$$

から決まる変換則に従うが，座標変換 $(z^1, \ldots, z^n) \to (z'^1, \ldots, z'^n)$ が正則写像であることに注意すれば，$\bar{\partial}$ の作用がどちらの局所座標系で見ても同じものになることがわかる．

こうして $\bar{\partial}$ 演算子の作用によってアーベル群の準同型 $\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U)$ が引き起こされる．これは制限写像と可換なので，$\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}$ という層準同型が定まる．さらに，前述の局所座標による表示から明らかなように，任意の正則函数 f に対して

$$\bar{\partial}(f\omega) = f\bar{\partial}\omega \tag{3.30}$$

が成り立つので，この準同型は $\mathcal{O}_X$ の作用と可換すなわち $\mathcal{O}_X$ 加群の層の準同型である．

$\bar{\partial}$ 演算子の場合にも

$$\bar{\partial}(\bar{\partial}\omega) = 0 \tag{3.31}$$

という等式が成立するので，$\mathcal{A}_X^{p,q}$ を $\bar{\partial}$ 演算子の定める準同型でつないだ列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,n} \longrightarrow 0 \tag{3.32}$$

は層の複体になる．これをドルボー複体（Dolbeault complex）という．この複体におけるポアンカレの補題の類似として，次のドルボーの補題（Dolbeault's lemma）が成立する（その証明もここでは省略するが，証明のアイディアをあとで簡単に紹介する）．

定理 3.2（ドルボーの補題）　層の複体 (3.32) は左端を除いて完全系列である．左端に関しては

$$\mathrm{Ker}(\bar{\partial} : \mathcal{A}_X^{p,0} \to \mathcal{A}_X^{p,1}) = \Omega_X^p \tag{3.33}$$

となる．特に，(3.32) の左端に Ω_X^p を包含写像 ι で追加したもの

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_X^{p,n} \longrightarrow 0 \tag{3.34}$$

は層の完全系列である．

層の複体 (3.32) から X 上の断面のアーベル群の複体

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,0}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,1}) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,n}) \longrightarrow 0$$

が得られる．ドルボーの補題は X の各点の茎のレベルでの完全性を主張するものであるから，次のように言い換えられる：

> $q > 0$ とするとき，X の点 x の開近傍 U において $\omega \in \Omega_X^{p,q}(U)$ が $\bar\partial\omega = 0$ を満たせば，x のある開近傍 $V \subseteq U$ とその上で定義された $\theta \in \Omega_X^{p,q-1}(V)$ が存在して $\omega = \bar\partial\theta$ となる．

この主張の中の θ が U 全体で定義されたものになることは保証されない．その意味で，ここで考えている（$U = X$ と選んだ場合に相当する）X 上の断面のアーベル群の複体は，左端を別としても，完全系列とは限らない．そのコホモロジー群

$$H_{\bar\partial}^{p,q}(X) = \frac{\mathrm{Ker}\ \bar\partial : \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q}) \to \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q+1})}{\mathrm{Im}\ \bar\partial : \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{p,q})} \tag{3.35}$$

をドルボーコホモロジー群（Dolbeault cohomology groups）という[†15]．後に明らかになるように，これは $\Omega_{\mathrm{X}}^{\mathrm{p}}$ の層係数コホモロジーと対応している．

3.3 いくつかの補足

i) ドルボーの補題の証明のアイディア

証明の鍵となるのは円盤領域 $D_r = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| < r\}$ において1変数の $\bar\partial$ 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f(z)$$

を解くことである．ただし $f(z)$ は閉円盤 $\overline{D_r} = \{z \in \boldsymbol{C} \mid |z| \le r\}$ 上で C^∞ 函数であるとする．この方程式の解は積分公式

$$u(z) = \int_{\overline{D_r}} \frac{f(w)}{w - z} \frac{dw \wedge d\bar w}{2\pi i} \tag{3.36}$$

によって与えられる（z を中心として $w = z + re^{i\theta}$ というように極座標表示す

[†15] 実際には $\mathcal{O}(X)$ 加群であり，特に複素線形空間の構造をもつ．

ればわかるように，積分は $w=z$ においても絶対収束している）．このことを用いればドルボーの補題の証明はポアンカレの補題の証明と同様に一種の帰納法に持ち込める．

例として，$\mathcal{A}_X^{0,0} \to \mathcal{A}_X^{0,1} \to \mathcal{A}_X^{0,2}$ を考えよう．次の補題を $k=n$ から出発して $k=1$ まで反復適用すればこの場合の証明は終わる．

補題 3.6　$(z^1,\ldots,z^n)=(0,\ldots,0)$ の近傍で $(0,1)$ 型微分形式 $\omega=\omega_j d\bar{z}^j$ が $\bar{\partial}\omega=0$ という条件を満たしているとする．さらに ω はある k に対して $d\bar{z}^1,\ldots,d\bar{z}^k$ のみ含むとする．このとき $(z^1,\ldots,z^n)=(0,\ldots,0)$ の近傍で定義されたある函数 u が存在して $\omega-\bar{\partial}u$ は $d\bar{z}^1,\ldots,d\bar{z}^{k-1}$ のみ含む．

証明　ω を $d\bar{z}^k$ を含む部分とそれ以外の部分 ω' に分けて $\omega=fd\bar{z}^k+\omega'$ という形に表す．$\bar{\partial}\omega=0$ という仮定から

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j}=0 \quad (j>k)$$

となる．u を前述の積分公式にならって

$$u(z^1,\ldots,z^n)=\int_{D_r}\frac{f|_{z^k=w^k}}{w^k-z^k}\frac{dw^k\wedge d\bar{w}^k}{2\pi i}$$

と定義する（$z^k\in D_r$ とする）．正数 r は積分領域が $f|_{z^k=w^k}$ の定義域に入るように選ぶ．このとき

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}^k}=f, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}^j}=0 \quad (j>k)$$

という等式が成立する．これは u が求めるものであることを示している．□

$\mathcal{A}_X^{0,q-1} \to \mathcal{A}_X^{0,q} \to \mathcal{A}_X^{0,q+1}$ の場合はもう少し複雑になるが，基本的には同じ論法で扱える．一般の場合 $\mathcal{A}_X^{p,q-1} \to \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}$ は $p=0$ の場合に帰着できる．

ii) 多重円盤のドルボーコホモロジー

ドルボーの補題の証明の核心部分は $\bar{\partial}$ 方程式 $\bar{\partial}u=\omega$ を解くことにあるが，上に見たように，得られた解 u の定義域は一般には ω の定義域よりも小さくならざるを得ない．ただし，ω の定義域 U が多重円盤（polydisk）すなわち円

盤領域の直積 $D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_n}$ の形に表せる領域の場合には，その多重円盤を内側から近似する多重円盤の列 $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U$ （それぞれが $\overline{U_k} \subset U_{k+1}$ という条件を満たすとする）を選んで次のような手順を経ることによって，U 全体で定義された解 u が得られる．

1. $\overline{U_1}$ の開近傍で $\bar{\partial} u_1 = \omega$ を満たすような U 上の函数 u_1 をつくる．そのためには $\overline{U_1}$ より大きい多重円盤たとえば U_2 の上でドルボーの補題の証明のようにして $\bar{\partial} v_1 = \omega$ を満たす函数 v_1 をつくり，$\overline{U_1}$ の開近傍で 1，$D \setminus U_2$ で 0 の値をとる函数 h を乗じて $u_1 = hv_1$ と定めればよい．
2. $\bar{U}_j$ の開近傍で $\bar{\partial} u_j = \omega$，$U_{j-1}$ 上で $|u_j - u_{j-1}| \leq 2^{-j}$ という条件を満たすような U 上の函数の列 $u_2, u_3, \ldots$ を帰納的に構成する．$u_2, \ldots, u_k$ まで構成されたとする．$\overline{U_{k+1}}$ の開近傍で $\bar{\partial} v_{k+1} = \omega$ を満たすような U 上の函数 v_{k+1} をつくる（第 1 段階と同様）．$\overline{U_k}$ の開近傍上では
$$\bar{\partial}(v_{k+1} - u_k) = \omega - \omega = 0$$
が成立するから，$v_{k+1} - u_k$ は $\overline{U_k}$ の開近傍で正則な函数である．したがって $v_{k+1} - u_k$ を U_k の中心でテイラー展開して十分高い次数までの部分和を p_k とおけば，コーシーの積分定理に基づく評価によって U_k 上で
$$|v_{k+1} - u_k - p_k| \leq 2^{-k-1}$$
という不等式が満たされる．$u_{k+1} = v_{k+1} - p_k$ が求めるものである．
3. $u = \lim_{k \to \infty} u_k$ が求める解を与える．

この解の構成法を前述のドルボーの補題の証明方法と組み合わせれば，次のコホモロジー消滅定理が得られる．

定理 3.3（多重円盤に対するコホモロジー消滅定理）　多重円盤 $U = D_{r_1} \times \cdots \times D_{r_n}$ に対して
$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(U) = 0 \quad (q > 0) \tag{3.37}$$
が成立する．

注意　多変数複素函数論の言葉（第 4 章を参照されたい）を用いれば，これは多重円

盤が「シュタイン開集合」あるいは「ルンゲ領域」であることの一つの顕れである.

iii) ドラームー複体とドラームコホモロジー

ドラームコホモロジーはもともと実多様体に対して定義されるものだが[†16], 複素多様体は実多様体でもあるので, やはりドラームコホモロジーを考えることができる. 実多様体 M のドラームコホモロジーは M 上の p 次 C^∞ 級微分形式の層 $\mathcal{A}_M^p$ のなすドラーム複体 (de Rham complex)

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_M^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_M^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}_M^n \longrightarrow 0$$

から出発して定義される. 複素多様体 X でドラームコホモロジーを定義するには複素局所座標 $(z^1, \ldots, z^n)$ とその複素共役 $(\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n)$ を座標とする. r 次 C^∞ 級微分形式の層 $\mathcal{A}_X^r$ はすでに導入した $\mathcal{A}_X^{p,q}$ を用いて

$$\mathcal{A}_X^r = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{A}_X^{p,q}$$

と表せる. $\bar{\partial}$ と同様にして正則座標に関する外微分 $\partial : \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p+1,q}$ を

$$\partial\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q} \tag{3.38}$$

と定義すれば, ∂ と $\bar{\partial}$ の和 $d = \partial + \bar{\partial}$ は X の実 $2n$ 次元多様体としてのドラーム複体

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{A}_X^{2n} \longrightarrow 0 \tag{3.39}$$

を定める. その X 上の断面の集合のコホモロジー群

$$H_{\mathrm{dR}}^r(X) = \frac{\mathrm{Ker}\ d : \Gamma(X, \mathcal{A}_X^r) \to \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{r+1})}{\mathrm{Im}\ d : \Gamma(X, \mathcal{A}_X^{r-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{A}_X^r)} \tag{3.40}$$

が X のドラームコホモロジー群 (de Rham cohomology group) である[†17]. これは定数層 $\boldsymbol{C}_X$ の層係数コホモロジーと対応している.

注意　調和積分論によれば, X がコンパクトケーラー多様体である場合には調和形式 (harmonic form) の空間のホッジ分解 (Hodge decomposition) を通じてドラームコホモロジーとドルボーコホモロジーが関連し合う. 参考文献 [115] を参照されたい.

[†16] 参考文献 [120] を参照されたい.

[†17] ドルボーコホモロジーと同様, これも複素線形空間の構造をもつ.

4　局所自由層と正則線形束

複素多様体上の局所自由層と呼ばれるものは正則線形束と関係がある．ドルボーコホモロジーは正則線形束を係数とするものに一般化できる．そのような一般化は無質量自由場の積分表示をドルボーコホモロジーで解釈するときに必要になる．

4.1　局所自由層

次の補助的な概念を導入する．

定義　位相空間 X とその空でない開部分集合 Y および X 上の（集合の）層 $\mathcal{F}$ が与えられているとする．$V \in \mathfrak{O}_Y$ に対して $\Gamma(V, \mathcal{F})$（$V \in \mathfrak{O}_X$ と見なしている）を対応させれば Y 上の前層ができる．これは局所性条件を満たすので層になる．これを $\mathcal{F}$ の Y への制限と呼び，$\mathcal{F}|_Y$ という記号で表す．

注意　これは包含写像 $i : Y \hookrightarrow X$ に関する $\mathcal{F}$ の逆像 $i^{-1}\mathcal{F}$ に他ならない．開集合でない部分集合 Y に対してもこの逆像によって制限 $\mathcal{F}|_Y$ を定義することができる．

定義　$\mathcal{L}$ が複素多様体 X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群の層であるとする．X の各点 x に対してその開近傍 U と適当な添字集合 I が存在して

$$\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus I} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_U \tag{3.41}$$

が成立するとき，$\mathcal{L}$ は局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群の層（sheaf of locally free $\mathcal{O}_X$ modules）あるいはもっと手短に局所自由層（locally free sheaf）であるという．□

特に重要なのは，上の定義で $\mathcal{L}|_U$ が

$$\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus r} = \underbrace{\mathcal{O}_U \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_U}_{r} \tag{3.42}$$

というように $\mathcal{O}_U$ の有限個の直和と同型になる場合である．

定義　X の各点 x のある開近傍 U において (3.42) の条件が満たされるとき $\mathcal{L}$ は有限生成局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群の層（sheaf of finitely generated locally free $\mathcal{O}_X$ modules）あるいは手短に有限生成局所自由層（finitely generated locally

free sheaf) であるという．X が連結であれば（以後これを仮定しよう）r は U によらず一定である．r をこの局所自由層の階数（rank）と呼ぶ．

4.2 正則線形束との対応

階数 r の局所自由層は階数 r の正則線形束と 1 対 1 に対応する．この対応に基づいて両者を同一視することが多いが，概念的にはもちろん別のものである．

i) 局所自由層から正則線形束へ

階数 r の局所自由層 $\mathcal{L}$ が与えられたとする．X を (3.42) が成立するような開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で覆う．その中の互いに交わる任意の一対 U_α, U_β を考える．これらの上には層の同型

$$\phi_\alpha : \mathcal{L}|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}, \quad \phi_\beta : \mathcal{L}|_{U_\beta} \simeq \mathcal{O}_{U_\beta}^{\oplus r}$$

がある．これから共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の層の同型

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} :\ \mathcal{O}_{U_\alpha\cap U_\beta}^{\oplus r} \simeq \mathcal{L}|_{U_\alpha\cap U_\beta} \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha\cap U_\beta}^{\oplus r}$$

が得られる．これは $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の断面の加群の同型を引き起こす．それを $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の正則函数の可逆行列 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \boldsymbol{C})$ によって

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_{U_\beta}^{\oplus r}) & \to & \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}) \\ v_\beta(x) & \mapsto & g_{\alpha\beta}(x) v_\beta(x) \end{array} \tag{3.43}$$

という形に表現すれば，構成から $g_{\alpha\beta}$ は次の性質をもつ：

1. $x \in U_\alpha \Longrightarrow g_{\alpha\alpha}(x) = 1$.
2. $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \Longrightarrow g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$.

これらのデータ $g_{\alpha\beta}$ を以下に説明するような「変換函数」として階数 r の正則線形束を構成することができる．

一般に複素多様体 X 上の階数 r の正則線形束（holomorphic vector bundle）とは，全射正則写像 $\pi : L \to X$（射影と呼ばれる）をもつ複素多様体 L で次の各条件を満たすものをいう：

1. X の適当な開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して正則同型 $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r$ がある．

2. 射影 $\pi_\alpha : U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r \to U_\alpha$ と π が

$$\pi = \pi_\alpha \circ \psi_\alpha$$

という関係で結ばれる.

3. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる U_α, U_β に対して $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ がある正則写像 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \boldsymbol{C})$ によって

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, v_\beta) = (x, g_{\alpha\beta}(x) v_\beta)$$

という形に表せる.

特に階数 1 の正則線形束を正則直線束（holomorphic line bundle）という．ここに登場した正則同型 ψ_α を L の U_α 上の正則局所自明化（holomorphic local trivialization）という．また $g_{\alpha\beta}$ は変換函数（transition function）と呼ばれ，すでに述べたような性質をもつ．逆に，そのような変換函数系が与えられれば正則線形束を直積束 $U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r$ の貼り合せによって

$$L = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r \,/ \sim \tag{3.44}$$

というように定義できる（図 3.3）．ここで $(x, v_\alpha) \in U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r$ と $(x, v_\beta) \in U_\beta \times \boldsymbol{C}^r$ の間の同値関係を

$$(x, v_\alpha) \sim (x, v_\beta) \iff x \in U_\alpha \cap U_\beta,\ v_\alpha = g_{\alpha\beta}(x) v_\beta \tag{3.45}$$

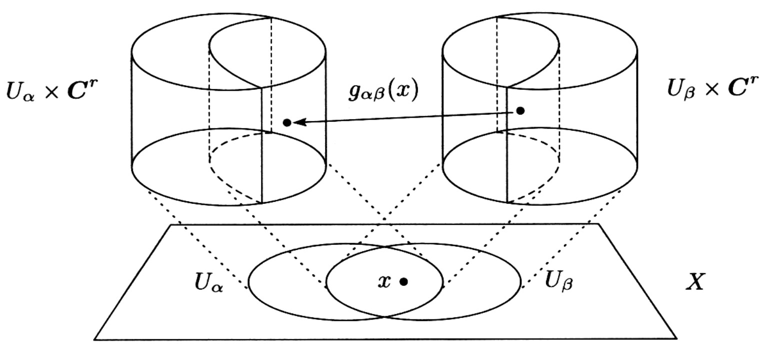


図 3.3 変換函数による正則線形束の構成

というように定義している．構成から，これは $\pi(x, v_\alpha) = x$ $(x \in U_\alpha)$ によって定まる射影 $\pi : L \to X$ に関して $\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r$ という局所自明化をもち，上に一般的に述べた正則線形束の条件をすべて満たしている．

ii) 正則線形束から局所自由層へ

逆に，X 上の階数 r の正則線形束 L（射影を $\pi : L \to X$ とする）が与えられたとする．このとき X の各開集合 U に対して U 上の L の正則断面（すなわち複素多様体としての正則写像 $s : U \to L$ であって，$\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ という条件を満たすもの）の集合 $\Gamma(U, L)$ を対応させることによって $\mathcal{O}_X$ 加群の層が定義される．この層を L の正則断面の層（sheaf of holomorphic sections）と呼び，$\mathcal{O}_X(L)$ という記号で表す．定義から

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(L)) = \Gamma(U, L) \tag{3.46}$$

となるが，両辺の $\Gamma(U, \cdot)$ の意味が全く異なることに注意されたい[†18]．L の正則局所自明性から $\mathcal{O}_X(L)$ が階数 r の局所自由層であることがわかる．実際，U 上で L が

$$\pi^{-1}(L) \simeq U \times \boldsymbol{C}^r$$

と自明化されるとき，U の任意の開部分集合 V に対して $\Gamma(V, \mathcal{O}_X(L)) \simeq \Gamma(V, \mathcal{O}_U^{\oplus r})$ が成り立つが，これは層の同型

$$\mathcal{O}_X(L)|_U \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus r}$$

を意味する．

iii) 準同型の対応

局所自由層の準同型と正則線形束の準同型も 1 対 1 に対応する．このことを見るために，まず局所自由層の準同型 $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ が与えられたとする．正則函数の層の直和との同型が成立するような開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を

[†18] 同じ「断面」という言葉ではあるが，層の断面は線形束の断面とは概念的に異なる．線形束の断面はいわば函数のグラフの概念を一般化したものである．その上の 1 点は底空間の点 x とその点における断面 s の値 $s(x)$ を決めるが，それからもとの断面自体を復元することは（たとえ x の近傍に限っても）できない．他方，層の断面の 1 点は底空間の点 x における線形束の断面 s の芽 s_x であって，x のある近傍 U における s の完全な情報をもっている．

$$\mathcal{L}|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}, \quad \mathcal{M}|_{U_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus s}$$

というように $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ に共通に選んで層の局所的断面を正則函数で表せば，準同型 ψ は U_α 上の正則函数の $s \times r$ 行列 $\psi_\alpha(x)$ の定める線形写像

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}) & \to & \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus s}) \\ v_\alpha(x) & \mapsto & w_\alpha(x) = \psi_\alpha(x) v_\alpha(x) \end{array} \tag{3.47}$$

によって表現できる．定義から容易にわかるように，$\mathcal{L}, \mathcal{M}$ の $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に関する変換函数をそれぞれ $g_{\alpha\beta}(x)$, $h_{\alpha\beta}(x)$ という記号で表せば，$\psi_\alpha(x)$ は

$$\psi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x) = h_{\alpha\beta}(x) \psi_\beta(x) \tag{3.48}$$

という関係式を満たす．逆に，この関係式を満たす行列値正則函数の族 $\{\psi_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$ は $\mathcal{L}$ から $\mathcal{M}$ への局所自由層としての準同型を定める．特に $r = s$ かつ $\psi_\alpha(x)$ が $\mathrm{GL}(r, \boldsymbol{C})$ 値であれば，局所自由層の同型を与える．

これは対応する正則線形束 L, M（射影を $\pi : L \to X$, $\rho : M \to X$ とする）の言葉に翻訳できる．実際，$v_\alpha(x)$, $w_\alpha(x)$ を局所自明化 $\pi^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r$, $\rho^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \boldsymbol{C}^s$ による L, M の断面の局所的表示と見なせば，上の $\psi_\alpha(x)$ と変換函数の間の関係式は

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \boldsymbol{C}^r & \to & U_\alpha \times \boldsymbol{C}^s \\ (x, v_\alpha) & \mapsto & (x, \psi_\alpha(x) v_\alpha) \end{array} \tag{3.49}$$

という写像の族によって束準同型 $\psi : L \to M$ （記号の節約のため局所自由層の準同型と同じ記号を用いている）が矛盾なく定義されること意味している．逆に，任意の束準同型はこのように記述することができる．特に $r = s$ かつ $\psi_\alpha(x)$ が $\mathrm{GL}(r, \boldsymbol{C})$ 値であれば，正則線形束の同型が得られる．

iv) 階数1の場合

階数1の局所自由層は可逆層（invertible sheaf）とも呼ばれる．これに対応するのは正則直線束である．

4.3 正則線形束に係数をもつドルボーコホモロジー

複素多様体 X 上の正則線形束 L（射影を $\pi : L \to X$ とする）が与えられたとき，以下のようにして L 係数のドルボーコホモロジーが定義できる．

まず L 係数の (p,q) 型微分形式の層 $\mathcal{A}_X^{p,q}(L)$ を導入する．L を自明化するような開集合 U_α による X の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を一つ選ぶ．自明化 $\pi^{-1}(U_\alpha)\simeq U_\alpha\times \boldsymbol{C}^r$ に伴う変換函数を $g_{\alpha\beta}$ とする．必要ならば開被覆を選び直すことによって，各 U_α には局所座標系 $(z_\alpha^1,\ldots,z_\alpha^n)$ が定義されているとしてよい．$\mathcal{A}_X^{p,q}(L)$ の断面は $U_\alpha\cap U_\beta$ 上で

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta \tag{3.50}$$

という変換関係式を満たす $\boldsymbol{C}^r$ 値の C^∞ 級微分形式

$$\omega_\alpha = \omega_{\alpha,i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q} dz_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_\alpha^{i_p}\wedge d\bar{z}_\alpha^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_\alpha^{j_q}$$

の組 $\omega=\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で表現される．正確に言えば，X の開集合 V 上の $\mathcal{A}_X^{p,q}(L)$ の断面を考えるときには各 ω_α は $V\cap U_\alpha$ 上で定義されているとする．

$\bar\partial$ 演算子はこのような微分形式の組に対しても意味をもつ．実際，$g_{\alpha\beta}$ が座標の正則函数であることに注意すれば

$$\bar\partial\omega_\alpha = \frac{\partial\omega_{\alpha,i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}}{\partial\bar{z}^k} d\bar{z}_\alpha^k\wedge\ dz_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_\alpha^{i_p}\wedge d\bar{z}_\alpha^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_\alpha^{j_q}$$

が ω_α と同じ変換関係式

$$\bar\partial\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\bar\partial\omega_\beta \tag{3.51}$$

を満たすことがわかる．こうして $\bar\partial$ は層準同型 $\bar\partial:\mathcal{A}_X^{p,q}(L)\to\mathcal{A}_X^{p,q+1}(L)$ を定める．さらに $\bar\partial\circ\bar\partial=0$ も成立し，層の複体

$$0\longrightarrow \mathcal{A}_X^{p,0}(L)\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}_X^{p,1}(L)\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}_X^{p,n}(L)\longrightarrow 0 \tag{3.52}$$

が得られる．この場合にもドルボーの補題に相当することが成り立ち，左端に L 係数の p 次正則微分形式（すなわち上に述べた意味での $(p,0)$ 型微分形式で係数 $\omega_{\alpha,i_1\cdots i_p}$ が正則函数であるもの）の層 $\Omega_X^p(L)$ を付け加えたもの

$$0\longrightarrow \Omega_X^p(L)\xrightarrow{\iota}\mathcal{A}_X^{p,0}(L)\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}_X^{p,1}(L)\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}_X^{p,n}(L)\longrightarrow 0 \tag{3.53}$$

が完全系列であることがわかる．L 係数のドルボーコホモロジー群は

$$H_{\bar\partial}^{p,q}(X,L) = \frac{\mathrm{Ker}\ \bar\partial:\Gamma(X,\mathcal{A}_X^{p,q}(L))\to\Gamma(X,\mathcal{A}_X^{p,q+1}(L))}{\mathrm{Im}\ \bar\partial:\Gamma(X,\mathcal{A}_X^{p,q-1}(L))\to\Gamma(X,\mathcal{A}_X^{p,q}(L))} \tag{3.54}$$

と定義される．このコホモロジー群は $\Omega_X^p(L)$ の層係数コホモロジーと対応している．

ツイスター理論をドルボーコホモロジーの言葉で定式化するときには，X をツイスター空間 $\mathbf{PT} = \mathbf{CP}^3$ の部分集合,（たとえば $\mathbf{PT}_{\pm}$），L を次節で説明する超平面束のテンサー積 $H^{\otimes m}$ に選ぶ．

5 射影空間とグラスマン多様体

これまで解説してきた一般的な概念を踏まえて，改めて複素射影空間と複素グラスマン多様体について考える．特に，これらの上で構成される基本的な局所自由層あるいはそれに対応する正則線形束の例を示す．これらは，いずれもツイスター理論と密接に関わっている．

5.1 複素射影空間

$\mathbf{CP}^n$ は $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の1次元複素線形部分空間の集合

$$\mathbf{CP}^n = \{\boldsymbol{C}\xi \subset \boldsymbol{C}^{n+1} \mid \xi \in \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\} \tag{3.55}$$

あるいは $c \in \mathrm{GL}(1, \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ の作用 $\xi \mapsto c\xi$ による $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の商集合

$$\mathbf{CP}^n = (\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})/\mathrm{GL}(1, \boldsymbol{C}) \tag{3.56}$$

である．$\xi \in \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ の同値類を $[\xi]$ という記号で表し，ξ に $[\xi]$ を対応させる写像を

$$\rho : \boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \ \to \ \mathbf{CP}^n$$

と表す．ξ の成分（すなわち $\mathbf{CP}^n$ の斉次座標）を $\xi = (\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ と書いて，$\mathbf{CP}^n$ を覆う $n+1$ 個の開集合

$$U_k = \{[\xi] \in \mathbf{CP}^n \mid \xi^k \neq 0\} \quad (k = 0, \ldots, n) \tag{3.57}$$

（$\mathbf{CP}^n$ から $\xi^k = 0$ という方程式の定める超平面を除いた部分）を導入する．U_k の上の非斉次座標 $\zeta^j = \xi^j/\xi^k$ （$j = 0, \ldots, n,\ j \neq k$）によって $\boldsymbol{C}^n$ との正則同型 $U_k \simeq \boldsymbol{C}^n$ が定まる．

$\mathbf{CP}^n$ 上には斉次正則函数のなす局所自由層とそれに対応する正則線形束がある．さらに普遍線形束と呼ばれる正則線形束がある．上に述べた局所座標系を用いてそれらを具体的に記述してみよう．

i) 斉次正則函数のなす局所自由層

m を任意の整数とするとき，$\mathbf{CP}^n$ の開集合 U に対して $\rho^{-1}(U)$ 上の m 次斉次性 $f(c\xi)=c^m f(\xi)$ （$c\neq 0$）をもつ正則函数 $f(\xi)$ からなる集合を対応させたものは $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}$ 加群の層となる．これを $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}(m)$ という記号で表す．すなわち

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}(m))=\{f\in\Gamma(\rho^{-1}(U),\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{n+1}})\mid f(c\xi)=c^m f(\xi)\ (c\neq 0)\} \tag{3.58}$$

特に $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}(0)$ は $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}$ と同じものである．以下では記号を簡単にするために，$\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}$ と $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^n}(m)$ をそれぞれ $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}(m)$ と略記する．

定理 3.4 $\mathcal{O}(m)$ は階数 1 の局所自由層である．

証明 $\mathbf{CP}^n$ の任意の開集合 V に対して $\Gamma(V,\mathcal{O}(m))$ の任意の要素 f は $\rho^{-1}(V)$ で定義された m 次正則函数であり，$k=0,\dots,n$ のそれぞれについて $\rho^{-1}(U_k)$ の上で

$$f(\xi)=(\xi^k)^m f\left(\frac{\xi^0}{\xi^k},\dots,\frac{\xi^n}{\xi^k}\right)$$

と表せる．右辺の $f(\cdots)$ の部分は $\rho^{-1}(V\cap U_k)$ 上の 0 次斉次正則函数，言い換えれば $V\cap U_k$ の上の正則函数と見なせる．したがって上の等式は

$$\Gamma(V\cap U_k,\mathcal{O}(m))\simeq\Gamma(V\cap U_k,\mathcal{O})$$

という同型があることを示す．この同型は開部分集合への制限においても保たれる（すなわち制限写像と可換である）から，層の同型

$$\mathcal{O}(m)|_{U_k}\simeq\mathcal{O}|_{U_k}$$

を与える．□

ii) 超平面束とそのテンサー積

$\mathcal{O}(m)$ に対応する正則線形束は正則直線束である．$U_j \cap U_k$ 上で

$$f\left(\frac{\xi^0}{\xi_j}, \ldots, \frac{\xi^n}{\xi^j}\right) = \left(\frac{\xi^k}{\xi^j}\right)^m f\left(\frac{\xi^0}{\xi^k}, \ldots, \frac{\xi^n}{\xi^k}\right)$$

という等式が成立するから，求める正則直線束の $U_k \times \boldsymbol{C}$ から $U_j \times \boldsymbol{C}$ への変換函数は

$$g_{jk} = (\xi^k/\xi^j)^m \tag{3.59}$$

で与えられる．特に $m = 1$ の場合の正則直線束を H という記号で表せば，一般の m の場合の正則直線束はその m 重テンサー積 $H^{\otimes m}$ となる．すなわち

$$\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(H^{\otimes m}) \tag{3.60}$$

が成立する．ただし $m < 0$ の場合には右辺は H の双対束 H^* のテンサー積 $(H^*)^{\otimes(-m)}$ と解釈する．

H は超平面束（hyperplane bundle）として知られる正則直線束である．その大域的断面は

$$\Gamma(\mathbf{CP}^n, H) \simeq \Gamma(\mathbf{CP}^n, \mathcal{O}(1)) = \{f \mid f(\xi) = \eta_j \xi^j,\ (\eta_0, \ldots, \eta_n) \in \boldsymbol{C}^{n+1}\} \tag{3.61}$$

という同型によって斉次1次式に1対1対応する．特に恒等的にゼロでない大域的断面 f の零点集合 $\{[\xi] \in \mathbf{CP}^n \mid f(\xi) = 0\}$ は $\mathbf{CP}^n$ の超平面となる．これが超平面束という名称の由来である．

iii) 普遍線形束

$\mathbf{CP}^n$ 上の普遍線形束（universal vector bundle）には普遍直線束（universal line bundle）と呼ばれる正則直線束ならびに普遍商束（universal quotient bundle）と呼ばれる階数 $n-1$ の正則線形束の2種類がある．これらはそれぞれ $\mathbf{CP}^n$ の各点 $[\xi]$ に線形空間 $\boldsymbol{C}\xi$ あるいは $\boldsymbol{C}^{n+1}/\boldsymbol{C}\xi$ を置いた線形束

$$L = \bigcup_{[\xi]\in\mathbf{CP}^n} \boldsymbol{C}\xi,$$
$$Q = \bigcup_{[\xi]\in\mathbf{CP}^n} \boldsymbol{C}^{n+1}/\boldsymbol{C}\xi \tag{3.62}$$

として定義される．L は $\boldsymbol{C}^{n+1}$ をファイバーとする直積束 $\mathbf{CP}^n \times \boldsymbol{C}^{n+1}$ の部分束という意味で普遍部分束（universal subbundle）とも呼ばれる．

これらの線形束も前述の開集合 $U_0, \ldots, U_n$ の上で自明化される．L の場合で説明しよう．$\pi : L \to \mathbf{CP}^n$ を底空間への射影とする．$[\xi] \in U_k$ に対して線形同型 $\boldsymbol{C}\xi \simeq \boldsymbol{C}$ を $v\xi/\xi^k \mapsto v$ という線形写像で定義すれば，L の U_k 上の正則局所自明化

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_k) & \simeq & U_k \times \boldsymbol{C} \\ v\xi/\xi^k & \mapsto & ([\xi], v) \end{array} \tag{3.63}$$

が得られる．$([\xi], v_j) \in U_j \times \boldsymbol{C}$ と $([\xi], v_k) \in U_k \times \boldsymbol{C}$ が $\pi^{-1}(U_j \cap U_k)$ の同じ点を定めるのは $v_j\xi/\xi^j = v_k\xi/\xi^k$ すなわち

$$v_j = (\xi^j/\xi^k)v_k$$

という等式が成立する場合である．これは L の変換函数が

$$g_{jk} = \xi^j/\xi^k \tag{3.64}$$

で与えられることを意味する．特に L は超平面束の双対束に同型である：

$$L \simeq H^* \tag{3.65}$$

5.2　複素グラスマン多様体

ここでは $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の 2 次元複素線形部分空間 $X \subseteq \boldsymbol{C}^{n+1}$ からなるグラスマン多様体

$$\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1}) = \{X \subset \boldsymbol{C}^{n+1} \mid X = \boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}},\ \dim X = 2\} \tag{3.66}$$

を考える（4 次元時空の取扱いに合わせるため X の基底を $\xi^{\dot{0}}, \xi^{\dot{1}}$ というように有点添字で番号づけている）．このグラスマン多様体と $\mathbf{CP}^n$ はクライン対応を一般化した対応図式

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Fl}(1, 2, \boldsymbol{C}^{n+1}) & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ \mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1}) & & \mathbf{CP}^n \end{array}$$

によって結ばれる．ちなみに，これはツイスター理論の高次元化の例でもある．

ここで射影空間の斉次座標の役割を果たすのはプリュッカー座標である．以下ではプリュッカー座標を用いてグラスマン多様体上に局所座標系を構成し，それに基づいて普遍線形束（グラスマン多様体の場合にも2種類のものが考えられる）の具体的な記述を与える．

i) プリュッカー座標

4次元時空 $\mathbf{CM}^{\#} = \mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^4)$ の場合と同様に $\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1})$ を階数2の $(n+1)\times 2$ 行列の同値類の集合

$$\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1}) = \{\Xi = (\xi^{\dot{0}}\ \xi^{\dot{1}}) \mid \xi^{\dot{0}}, \xi^{\dot{1}} \in \boldsymbol{C}^{n+1},\ \mathrm{rank}\,\Xi = 2\}/\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C}) \tag{3.67}$$

として扱おう．射影空間の場合にならって，Ξ の同値類を $[\Xi]$ という記号で表すことにする．ここに出てきた行列 $\Xi = (\xi^{\dot{0}}\ \xi^{\dot{1}})$ の $\binom{n+1}{2} = (n+1)n/2$ 個の小行列式

$$p^{ij}(\xi) = \det\begin{pmatrix} \xi^{i\dot{0}} & \xi^{i\dot{1}} \\ \xi^{j\dot{0}} & \xi^{j\dot{1}} \end{pmatrix} \quad (0 \le i < j \le n) \tag{3.68}$$

（$\xi^{i\dot{a}}$ は $\xi^{\dot{a}}$ の第 i 成分を表す）が今の場合のプリュッカー座標である．$p^{ij}(\Xi h) = p^{ij}(\Xi)\det h$ という等式が成立するのでプリュッカー座標自体はグラスマン多様体上の函数とは見なせないが，それらの比は函数と見なせる．さらにプリュッカー座標を並べたものを $\mathbf{CP}^{(n+1)n/2-1}$ という複素射影空間の点の斉次座標と見なせば正則写像 $\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1}) \to \mathbf{CP}^{(n+1)n/2-1}$ が定まるが，これは埋め込み写像となる．これをプリュッカー埋め込み（Plücker embedding）という．その像はプリュッカー関係式（Plücker relation）と呼ばれる一連の斉次2次式で特徴づけられる．

たとえば $\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^4)$ の場合にはプリュッカー埋め込みは5次元複素射影空間への写像 $\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^4) \to \mathbf{CP}^5$ となる．その像は $p^{01}p^{23} - p^{02}p^{13} + p^{03}p^{12} = 0$ という方程式によって定義される2次超曲面になる．α 平面と β 平面はもともとこのような2次超曲面に付随する概念である．

ii) 局所座標系

射影空間の場合の U_k に相当するものは

$$U_{kl} = \{[\Xi] \in \mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1}) \mid p^{kl}(\Xi) \neq 0\} \tag{3.69}$$

という $(n+1)n/2$ 個の開部分集合である．プリュッカー座標の比 $p^{ij}(\Xi)/p^{kl}(\Xi)$ は U_{kl} 上の正則函数だが，射影空間の場合と違ってこれらは独立ではない．独立な函数の組を U_{kl} 上の座標系として取り出すために $\mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})$ の右作用を用いて Ξ をある標準形に正規化する．

どの U_{kl} でも同様なので $U_{n-1,n}$ について説明する．この開集合では $p^{n-1,n}(\Xi) \neq 0$ だから Ξ の最後の 2 行からなる 2×2 部分 $h = (\xi^{i\dot{a}})_{i=n-1,n;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}}$ は可逆行列である．その逆行列を右から乗じれば Ξ は

$$\Xi h^{-1} = \begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ \vdots & \vdots \\ x^{n-2,\dot{0}} & x^{n-2,\dot{1}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

という行列に移る．$x^{i\dot{a}}$ $(i = 0, \ldots, n-2,\ \dot{a} = \dot{0}, \dot{1})$ が $U_{n-1,n}$ 上の局所座標系を与える．これらの座標によって正則同型 $U_{n-1,n} \simeq \boldsymbol{C}^{2n-2}$ が定まる．この Ξh^{-1} に対するプリュッカー座標は

$$p^{ij}(\Xi h^{-1}) = \det \begin{pmatrix} x^{i\dot{0}} & x^{i\dot{1}} \\ x^{j\dot{0}} & x^{j\dot{1}} \end{pmatrix}$$

および

$$p^{i,n-1}(\Xi h^{-1}) = -x^{i\dot{1}}, \quad p^{i,n}(\Xi h^{-1}) = x^{i\dot{0}}, \quad p^{n-1,n}(\Xi h^{-1}) = 1$$

という値になる．特に $x^{i\dot{a}}$ は

$$x^{i\dot{0}} = p^{i,n}(\Xi)/p^{n-1,n}(\Xi), \quad x^{i\dot{1}} = -p^{i,n-1}(\Xi)/p^{n-1,n}(\Xi)$$

というようにプリュッカー座標の比として表せる．

他の U_{kl} についても同様の局所座標系が選べる（このあとすぐに説明する）．特に $\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1})$ は $2n-2$ 次元の複素多様体である．

iii) 普遍線形束

射影空間の場合と同様に2種類の普遍線形束

$$
\begin{aligned}
S &= \bigcup_{[\Xi]\in \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1})} (\boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}}),\\
Q &= \bigcup_{[\Xi]\in \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1})} \boldsymbol{C}^{n+1}/(\boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}})
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

が定義される．S を普遍部分束（universal subbundle），Q を普遍商束（universal quotient bundle）という．

これらの普遍線形束は前述の開集合 U_{kl} の上で自明化され，二つの開集合の間の変換函数を具体的に求めることによって正則線形束であることが確かめられる．このことを S の場合に説明しよう．

$[\Xi] \in U_{kl}$ のときには Ξ の第 k, l 行を取り出した 2×2 行列 $h_{kl} = (\xi^{i\dot{a}})_{i=k,l;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}}$ が可逆であり，その逆行列を Ξ の右から乗じたものは

$$
\Xi h_{kl}^{-1} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } l \text{ 行} \\ \\ \end{matrix}
\tag{3.72}
$$

となる．第 k, l 行以外の行列要素が U_{kl} 上の局所座標を与える．

$[\Xi]$ における S のファイバーは Ξ の二つの列で張られる線形空間 $\boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}}$ であり，その任意の要素は

$$
\Xi\psi = \xi^{\dot{0}}\psi_{\dot{0}} + \xi^{\dot{1}}\psi_{\dot{1}}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_{\dot{0}} \\ \psi_{\dot{1}} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^2
$$

というように表せる．射影空間の普遍部分束の場合の正則局所自明化にならって線形同型 $\boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}} \simeq \boldsymbol{C}^2$ を $\Xi h_{kl}^{-1} v \mapsto v$ という線形写像で定義すれば，S の U_{kl} 上の正則局所自明化

$$
\begin{array}{ccc}
\pi^{-1}(U_{kl}) & \simeq & U_{kl} \times \boldsymbol{C}^2 \\
\Xi h_{kl}^{-1} v & \mapsto & ([\Xi], v)
\end{array}
\tag{3.73}
$$

が得られる．$([\Xi], v_{ij}) \in U_{ij} \times \boldsymbol{C}^2$ と $([\Xi], v_{kl}) \in U_{kl} \times \boldsymbol{C}^2$ が $\pi^{-1}(U_{ij} \cap U_{kl})$ の同じ点に対応するのは $\Xi h_{ij}^{-1} v_{ij} = \Xi h_{kl}^{-1} v_{kl}$ という等式が成立するときである[†19]．これは $h_{ij}^{-1} v_{ij} = h_{kl}^{-1} v_{kl}$ すなわち

$$v_{ij} = h_{ij} h_{kl}^{-1} v_{kl}$$

という等式が成立する場合である．このことから $U_{ij} \times \boldsymbol{C}^2$ と $U_{kl} \times \boldsymbol{C}^2$ の変換函数が

$$g_{ij,kl} = h_{ij} h_{kl}^{-1} \tag{3.74}$$

であることがわかる．これらは $U_{ij} \cap U_{kl}$ の局所座標の正則函数であるから，S が正則線形束であることも同時に確かめられたことになる．

例として 4 次元時空 $\mathbf{CM}^{\#} = \mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^4)$ の場合を考えてみよう．特に興味深いのは U_{01} と U_{23} の間の貼り合せの様子である．U_{23} と U_{01} の上で Ξ はそれぞれ

$$\Xi h_{23}^{-1} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Xi h_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

と正規化される．x, y は 2×2 行列，1 は 2×2 単位行列で，x は $\mathbf{CM}$ 上の座標行列 $(x^{a\dot{a}})$ に他ならない．$U_{23} \cap U_{12}$ 上ではこれらは

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} x, \quad y = x^{-1}$$

という関係にある．対応する S の正則局所自明化 $\pi^{-1}(U_{23}) \simeq U_{23} \times \boldsymbol{C}^2$, $\pi^{-1}(U_{01}) \simeq U_{01} \times \boldsymbol{C}^2$ において，$([\Xi], v) \in U_{23} \times \boldsymbol{C}^2$ と $([\Xi], w) \in U_{12} \times \boldsymbol{C}^2$ を結ぶ関係は

$$w = xv \tag{3.76}$$

となる．後述するように S の断面は $\psi_{\dot{a}}$ 型のスピナー場と解釈できるので，v, w を結ぶ関係は U_{23} から U_{01} へ乗り移る際のスピナー場の変換則を与える．反転 $x \to x' = -hx^{-1}h^*$ （特に $x' = -x^{-1}$）に関する無質量自由場の方程式の

[†19] 記号がかなり複雑になっているので注意されたい．h_{kl} や v_{kl} はそれ自体が 2×2 行列や $\boldsymbol{C}^2$ の要素である．添字 k, l は関係する開集合 U_{kl} のラベルであり，行列添字ではない．

変換則（第 1 章を参照されたい）に x（のテンサー積）が現れることもこれによって説明できる[20].

ちなみに，S のファイバーを射影化して得られる $\mathbf{CP}^1$ 束は多様体として $\mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{C}^{n+1})$ と同一視できる（底空間への射影が π_2 に他ならない）．実際，底空間の点 $[\Xi]$ におけるこの $\mathbf{CP}^1$ 束のファイバーの各点は $X_2 = \boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}} \subset \boldsymbol{C}^{n+1}$ の 1 次元部分空間 $X_1 \subset X_2$ を定めるから，$\mathbf{CP}^1$ 束の各点は $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の線形部分空間の組 (X_1, X_2) すなわち $\mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{C}^{n+1})$ の点と 1 対 1 に対応する．S の U_{kl} 上の局所自明化からこの $\mathbf{CP}^1$ 束の局所自明化

$$\pi_2^{-1}(U_{kl}) \simeq U_{kl} \times \mathbf{CP}^1 \tag{3.77}$$

が得られる．

iv) スピナー束としての解釈

添字の取扱いから推察できるように，普遍部分束 S と普遍商束 Q の断面はスピナー場と解釈できる．すなわち，4 次元時空の場合の記号に合わせれば，S の断面は下付き有点添字 $\dot{a} = \dot{0}, \dot{1}$ をもつ $\psi_{\dot{a}}$ 型のスピナー場であり，Q の断面は上付き無点添字 $a = 0, \ldots, n-2$ をもつ ϕ^a 型のスピナー場である．その意味でこれらの線形束はスピナー束（spinor bundle）の一種である．ただし，一般次元の場合には有点添字と無点添字で成分数が異なることになる．

これらの線形束やその双対束の複数のテンサー積によって一般の型のスピナー束が得られる．たとえば，$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1})$ の接束[21] $T\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1})$ に対して

$$T\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1}) \simeq Q \otimes S^* \tag{3.78}$$

という線形束の同型がある．特に，$\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1})$ の各点 X（$\boldsymbol{C}^{n+1}$ の線形部分空間と見なす）の接空間に対して

$$T_X\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{C}^{n+1}) \simeq (\boldsymbol{C}^{n+1}/X) \otimes X^* \simeq \mathrm{Hom}(X, \boldsymbol{C}^{n+1}/X) \tag{3.79}$$

---

[20] この変換則では $\det x$ という因子も現れたが，これは変換された方程式に余分のポテンシャル項を生じさせないために入れたものである．

[21] 正確に言えば正則接束（holomorphic tangent bundle）であり，そのファイバーである接空間は正則接空間（holomorphic tangent space）であるが，煩雑なのでここでは「正則」という言葉を省略する．

という線形同型がある．ここで X^* は X の双対空間を，また $\mathrm{Hom}(X, \boldsymbol{C}^{n+1}/X)$ は X から $\boldsymbol{C}^{n+1}/X$ への線形写像のなす線形空間を表す．したがって，前述のように Q を ϕ^a 型，S^* を $\psi^{\dot{a}}$ 型のスピナー束と解釈すれば，$\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1})$ の接ベクターは $v^{a\dot{a}}$ という型の混合スピナーとして理解できる．このことを4次元時空の場合の **CM** に相当する $U_{n-1,n}$ の上の局所座標で見てみよう．すでに述べたように Ξh^{-1} の行列要素の一部として $x^{a\dot{a}}$（$a = 0, \ldots, n-2$, $\dot{a} = 0, 1$）という局所座標が選べる．任意の接ベクターはそれを用いて $v^{a\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$（$\partial_{a\dot{a}} = \partial/\partial x^{a\dot{a}}$）と表せる．接空間に関する前述の同型は $v^{a\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$ に対して $X = \boldsymbol{C}\xi^{\dot{0}} + \boldsymbol{C}\xi^{\dot{1}}$ から $\boldsymbol{C}^{n+1}$ への線形写像

$$\xi^{\dot{a}}\psi_{\dot{a}} \ \mapsto \begin{pmatrix} v^{0\dot{a}}\psi_{\dot{a}} \\ \vdots \\ v^{n-2\dot{a}}\psi_{\dot{a}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.80}$$

と射影 $\boldsymbol{C}^{n+1} \to \boldsymbol{C}^{n+1}/X$ の合成（X から $\boldsymbol{C}^{n+1}/X$ への線形写像となる）を対応させることによって得られるものである．他の U_{ij} の上でも同様のことが言える．

覚え書き

1. 「層」という語にはシート状のものが層をなして積み重なった描像が込められている．他方，英語の "sheaf" は，束（そく）と訳される "bundle" と同様に，「束ねられたもの」を意味する語であり，層状のものを指す語感はない．sheaf は仏語の "faisceau" の英訳であるが，faisceau も束ねられたものという意味の語である．層（そう）という語は，前述の直観的描像に加えて，読み方が faisceau（フェソー）の第2音節の発音に近いという理由で日本語への訳語として採用されたようである．
2. 複素多様体とその上の層・コホモロジー・線形束に関しては小林の複素幾何学の教科書 [115] の第1巻がわかりやすい．第2巻は調和積分論を詳しく解説している．層とそれに関連するさまざまな概念は代数幾何学の基礎でもあるので，代数幾何学の教科書の中で解説されることが多いが，ザリスキー位相に基づく

純代数幾何学的な定式化は無質量自由場の積分表示のような題材を扱うには向いていない．グリフィスとハリスの代数幾何学の教科書 [33] はドルボーコホモロジーや調和形式などを駆使するいわゆる「超越的方法」に詳しく，グラスマン多様体や射影幾何学に関する題材も豊富に紹介しているので，ツイスター理論を学ぶための参考書としても有用だろう．

3. 層の概念は代数幾何学や複素幾何学の研究に用いられることが多いが，解析学においても，佐藤（M. Sato）の創始した超函数（hyperfunction）の理論ではその基礎づけのためにさまざまな層やその局所コホモロジー（local cohomology）あるいは相対コホモロジー（relative cohomology）と呼ばれるコホモロジー理論が用いられる．超函数論については金子の教科書 [112] を参照されたい．この本は層係数コホモロジーの理論や多変数複素函数論への入門書として読むこともできる．ちなみに，日本語で「超函数」と呼ばれるものにはシュワルツ（L. Schwarz）の "distribution" もあるが，シュワルツの超函数は函数解析的考え方に基づくものである．そこでは L^2 空間などとは異質の函数空間を用いることによって局所性を取り入れている．

4. 普遍線形束によるスピナー束の定式化についてはイーストウッドらの論文 [24] やウォードとウェルズの著書 [102] に詳しい解説がある．無質量自由場の方程式の大域的意味もそれによって明らかになる．ちなみに，ウォードとウェルズの本は前半で多様体論・層係数コホモロジー・代数的位相幾何学を基礎から丁寧に解説していて，それらを総合的に学ぶための教科書としても使える．

第4章
層係数コホモロジーとペンローズ変換

無質量自由場の積分表示を積分変換と見なしたものをペンローズ変換という．第2章で注意したように，ペンローズ変換の定義域は函数空間というよりもむしろある種のコホモロジー群と考えられる．そのようなコホモロジー的解釈のために用いられる枠組みとして層係数コホモロジーとドルボーコホモロジーがある．層係数コホモロジーによる解釈はペンローズ自身の研究に遡るもので [69, 71]，その後イーストウッド，ウェルズとの協力によって最終的な形にまとめられた [24]．ドルボーコホモロジーを用いる定式化はウッドハウス [107] によって提案され，ウェルズの初期の研究 [103] でも取り上げられた．この章では層係数コホモロジーの枠組みに基づくペンローズ変換の定式化を紹介する．負ヘリシティの場合は技術的に複雑になるので，ここでは正ヘリシティの場合のみ扱うことにする．

層係数コホモロジー（手短に層コホモロジーとも呼ばれる）自体の定式化にもいくつかの流儀がある．ここでは，直観的に理解しやすくツイスター理論で伝統的に広く用いられてきたものとして，チェックコホモロジーを採用する．チェックコホモロジーは実際の計算に適しているという利点をもつが，コホモロジー論としての一般的な性質を確かめることが煩雑になる．以下では議論が煩雑になる部分を適当に省略しながら，層係数コホモロジーの一般論をなるべく手短に紹介し，それを踏まえて本題のペンローズ変換の定式化に向かう．

1　チェックコホモロジー

チェックコホモロジーは位相空間 X 上のアーベル群の層に対して定義される．X にはハウスドルフ性[†1]やパラコンパクト性[†2]を仮定しておく（特に後者は欠かせない）．要するに，通常の多様体のようなものを想定しておけば問題はない．

1.1　開被覆に関するチェックコホモロジー

定義　$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は X の開被覆であるとする．X のどの点 x に対しても x を含む U_α が高々有限個であるとき，開被覆 $\mathcal{U}$ は局所有限（locally finite）であるという．□

X 上にアーベル群の層 $\mathcal{F}$ と局所有限な開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が与えられているとする．これらに対して $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$（$p = 0, 1, \ldots$）という記号で表されるチェックコホモロジー群を定義しよう．

定義　$\mathcal{U}$ に属する $p+1$ 個の開集合の組 $(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_p})$ で $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p} \neq \emptyset$ という条件を満たすものを $\mathcal{U}$ の p 次元単体（p dimensional simplex）あるいは手短に p 単体（p-simplex）と呼ぶ．$\mathcal{U}$ の各 p 単体 $(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_p})$ に対して $\Gamma(U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_p}, \mathcal{F})$ の要素 $c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ が定義され，添字 α_0, …, α_p に関して完全反対称

$$c_{\cdots\alpha_j\cdots\alpha_i\cdots} = -c_{\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\cdots} \tag{4.1}$$

であるとき，これらの $c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ の組 $c = (c_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$ を $\mathcal{F}$ 係数の p 次元コチェイン（p dimensional cochain）あるいは手短に p コチェイン（p-cochain）と呼ぶ．$\mathcal{F}$ 係数の p コチェイン全体の集合を $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ という記号で表す．

[†1] 互いに異なる任意の2点 x_1, x_2 に対してそれを分離する開近傍（すなわち $U_1 \in \mathfrak{O}_X(x_1)$, $U_2 \in \mathfrak{O}_X(x_2)$ であって $U_1\cap U_2 = \emptyset$ という条件を満たすもの）が存在するとき，X はハウスドルフ（Haussdorf）であるという．

[†2] 任意の開被覆に対してその細分として局所有限な開被覆が存在するとき（これらの言葉の意味は本文中で追々説明される）X はパラコンパクト（paracompact）であるという．多様体論におけるパラコンパクト性の意義については参考文献 [120] を参照されたい．

定義　余境界演算子（coboundary operator）と呼ばれる準同型 $\delta : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ を $c=(c_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$ に対して

$$(\delta c)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} = \sum_{q=0}^{p+1}(-1)^q c_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha_q}\cdots\alpha_{p+1}} \tag{4.2}$$

と定義する．ここで $\widehat{\alpha_q}$ は α_q を除去することを表す．正確に言えば，右辺の各項は $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_{p+1}}$ へ制限したものであるが，以後特に混乱のおそれがなければ制限記号をこのように省略する．p の小さい方から

$$\begin{aligned}(\delta c)_{\alpha_0\alpha_1} &= c_{\alpha_1} - c_{\alpha_0},\\ (\delta c)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} &= c_{\alpha_1\alpha_2} - c_{\alpha_0\alpha_2} + c_{\alpha_0\alpha_1},\\ (\delta c)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3} &= c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - c_{\alpha_0\alpha_2\alpha_3} + c_{\alpha_0\alpha_1\alpha_3} - c_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\end{aligned}$$

などとなる．

注意　p 単体 $(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_p})$ に対して添字の組 $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)$ を頂点とする抽象的な $p+1$ 次元多面体が付随していると考えれば，余境界演算子の幾何学的な意味が見えてくる（図 4.1）．たとえば α_0, $\{\alpha_0,\alpha_1\}$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\}$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ はそれぞれ抽象的な点・線分・3 角形・4 面体を表す（「単体」とは本来このようなものを意味する）．向きづけも考慮したそれらの境界は

$$\begin{aligned}\partial(\alpha_0,\alpha_1) &= \alpha_1 - \alpha_0,\\ \partial(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) &= (\alpha_1,\alpha_2) - (\alpha_0,\alpha_2) + (\alpha_0,\alpha_1),\\ \partial(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) - (\alpha_0,\alpha_2,\alpha_3) + (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_3) - (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\end{aligned}$$

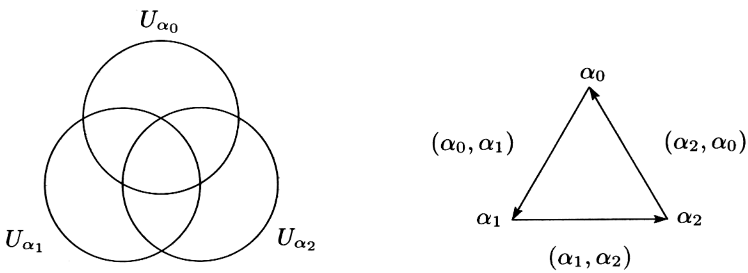


図 4.1　開被覆の単体と抽象的単体

となる．右辺は単体の整数係数線形結合すなわちチェイン（chain）であり，これによってチェインのなすアーベル群（$\boldsymbol{Z}$ 加群）の間に境界演算子（boundary operator）と呼ばれる準同型 ∂ が決まる．コチェイン c の成分 $c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ をコチェインとチェインのペアリング

$$c_{\alpha_0\cdots\alpha_p} = \langle c,\, (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)\rangle$$

と見なせば，δ と ∂ は

$$\langle \delta c,\, (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)\rangle = \langle c,\, \partial(\alpha_0, \ldots, \alpha_p)\rangle$$

という等式が成立するという意味で互いに随伴（adjoint）の関係にある．

定義　$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ は成分ごとの和

$$(c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) + (c'_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) = (c_{\alpha_0\cdots\alpha_p} + c'_{\alpha_0\cdots\alpha_p}) \tag{4.3}$$

によってアーベル群となる．その部分アーベル群

$$\begin{aligned} Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \operatorname{Ker}\delta : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \\ B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \operatorname{Im}\delta : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

を導入する．$Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の要素をコサイクル（cocycle），$B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の要素をコバウンダリ（coboundary）という[†3]．□

直接計算（あるいは境界演算子 ∂ の対応する性質）によって等式

$$\delta(\delta c) = 0 \tag{4.5}$$

が確かめられるので包含関係 $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subseteq Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が成立する．

定義　商アーベル群

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})/B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \tag{4.6}$$

を $\mathcal{U}$ に関する $\mathcal{F}$ 係数の p 次チェックコホモロジー群（p-th Čech cohomology group）と呼ぶ．以後，コサイクル $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の定めるコホモロジー群の要

[†3] この言葉遣いにならって一般的な複体 $\cdots \to C^{p-1} \to C^p \to C^{p+1} \to \cdots$ においても $\operatorname{Ker}(C^p \to C^{p+1})$ の要素をコサイクル，$\operatorname{Im}(C^{p-1} \to C^p)$ の要素をコバウンダリと呼ぶことがある．

素すなわちコホモロジー類（cohomology class）を $[c]$ という記号で表すことにする．□

チェックコホモロジー群は一般に開被覆に依存し，それを具体的に決定することも容易ではない．ただし，例外的に 0 次チェックコホモロジー群は次のように開被覆の選び方によらず決まる．

補題 4.1 X 上の任意のアーベル群の層 $\mathcal{F}$ に対して

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) \tag{4.7}$$

が成立する．

証明 $c=(c_\alpha) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ に対して $\delta c = 0$ は

$$U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \neq \emptyset \implies c_{\alpha_0}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}} = c_{\alpha_1}|_{U_{\alpha_0}\cap U_{\alpha_1}}$$

が成立することを意味する．層の断面の満たす局所性条件によって，このような $c_\alpha \in \Gamma(U_\alpha,\mathcal{F})$ は X 全体で定義されたある断面 $s \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ を定める．逆に，そのような大域的断面 s に対して $c_\alpha = s|_{U_\alpha}$ はコサイクルを定める．□

1.2 開被覆の細分に伴うコホモロジーの関係

定義 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in B}$ において添字集合の間の写像 $\sigma : B \to A$ が存在して各 $\beta \in B$ に対して $V_\beta \subseteq U_{\sigma(\beta)}$ が成立するとき，$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の細分（refinement）であるという．σ をこの細分の選択写像（mapping of choice）と呼ぶ．

注意 単に $\mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ の細分である，というだけでは $V_\beta \in \mathcal{V}$ が $\mathcal{U}$ に属する開集合のどれかに含まれることしか意味しない．一般に $V_\beta \subseteq U_\alpha$ という包含関係にある $U_\alpha \in \mathcal{U}$ は一つとは限らない．そのうちの一つを指定するのが選択写像の役割である．□

このような細分が選択写像 σ とともに与えられたとする．このとき p コチェインのアーベル群の間に準同型 $\sigma^* : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ を

$$(\sigma^* c)_{\beta_0\cdots\beta_p} = c_{\sigma(\beta_0)\cdots\sigma(\beta_p)}|_{V_{\beta_0}\cap\cdots V_{\beta_p}} \tag{4.8}$$

と定義することができる．これは余境界演算子と可換

$$\delta \circ \sigma^* = \sigma^* \circ \delta \tag{4.9}$$

なのでコホモロジー群の準同型

$$\sigma^* : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

を引き起こす．コホモロジーで見ればこの準同型は選択写像の選び方に依存しない．それを確かめるために次のことを用いる．

補題 4.2 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ は二つの選択写像 $\sigma_1 : B \to A$, $\sigma_2 : B \to A$ に対して $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分であるとする．このときアーベル群の準同型 $h : C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ で

$$\sigma_2^* - \sigma_1^* = \delta \circ h + h \circ \delta \tag{4.10}$$

という条件を満たすものが存在する．

注意 この h のような性質をもつ写像を一般にホモトピー写像 (homotopy mapping) という．

証明（概略） $p = 0, 1$ の場合には $c = (c_{\alpha_0\alpha_1}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\tilde{c} = (\tilde{c}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \in C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ に対して $h(c) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $h(\tilde{c}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ を

$$\begin{aligned} h(c)_{\alpha_1} &= c_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_1)}, \\ h(\tilde{c})_{\alpha_1\alpha_2} &= \tilde{c}_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_2)} - \tilde{c}_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_1(\alpha_2)\sigma_2(\alpha_2)} \end{aligned}$$

と定義する．このとき

$$\begin{aligned} (\delta h(c))_{\alpha_1\alpha_2} &= c_{\sigma_1(\alpha_2)\sigma_2(\alpha_2)} - c_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_1)}, \\ (\delta c)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} &= c_{\alpha_1\alpha_2} - c_{\alpha_0\alpha_2} + c_{\alpha_0\alpha_1}, \\ (h(\delta c))_{\alpha_1\alpha_2} &= c_{\sigma_2(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_2)} + c_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_1)} - c_{\sigma_1(\alpha_2)\sigma_2(\alpha_2)} - c_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_1(\alpha_2)} \end{aligned}$$

となるので

$$(\delta h(c))_{\alpha_1\alpha_2} + (h(\delta c))_{\alpha_1\alpha_2} = c_{\sigma_2(\alpha_1)\sigma_2(\alpha_2)} - c_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_1(\alpha_2)}$$

という等式が成立し，h が求める条件を満たすものであることがわかる．$p \geq 2$ の場合には $c \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ に対してまず

$$(k(c))_{\alpha_1 \cdots \alpha_{p+1}} = \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q+1} c_{\sigma_1(\alpha_1) \cdots \sigma_1(\alpha_q) \sigma_2(\alpha_q) \cdots \sigma_2(\alpha_{p+1})}$$

を考えて，それを添字について反対称化したものを $(h(c))_{\alpha_1 \cdots \alpha_{p+1}}$ と定義すれば，求める写像 $h : C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が得られる．□

この補題を用いれば，任意のコサイクル $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ に対して

$$[\sigma_2^* c] - [\sigma_1^* c] = [\delta(hc)] + [h(\delta c)] = 0 \tag{4.11}$$

というコホモロジー類の等式が成立する．こうして準同型 $\sigma^* : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ が選択写像の選び方によらず決まることがわかる．

1.3　細分に関する帰納的極限

X の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta \in A'}$ に対してその共通細分 $\mathcal{U}'' = \{U''_\gamma\}_{\gamma \in A''}$ が必ず存在する[†4]（たとえば両者を合体させたもの $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ がその例である）．$\mathcal{U}''$ が共通細分ならば，そのチェックコホモロジー群へ合流する準同型

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \searrow & \\ & & H^p(\mathcal{U}'', \mathcal{F}) \\ H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}) & \nearrow & \end{array}$$

がある．この合流性[†5]のおかげで開被覆の細分に関する帰納的極限 $\varinjlim H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ が考えられる．直観的にはこれは開被覆を細分によって限りなく細かくして行く極限である．この帰納的極限によって最終的な層係数コホモロジー群を定義する．

[†4] このことを「X の開被覆全体の集合が細分に関して有向集合（directed set）をなす」という．

[†5] 前層の茎の定義などに用いた帰納的極限も同様の性質に基づいて定義されている．

定義　層 $\mathcal{F}$ を係数とする p 次コホモロジー群を

$$H^p(X,\mathcal{F}) = \varinjlim H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad \text{（開被覆の細分に関する帰納的極限）} \tag{4.12}$$

と定義する．

注意　この定義を噛み砕いて言い換えれば

$$H^p(X,\mathcal{F}) = \bigcup_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \ / \ \sim \tag{4.13}$$

となる．ここで合併集合は $\mathcal{U}$ を X のあらゆる局所有限被覆にわたって走らせたものである．この合併集合の二つの要素 $[c] \in H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $[c'] \in H^p(\mathcal{U}',\mathcal{F})$ に対して，$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta\in A'}$ の共通細分 $\mathcal{U}'' = \{U''_\gamma\}_{\gamma\in A''}$ が存在して選択写像 $\sigma : A'' \to A$, $\sigma' : A'' \to A'$ に関して

$$[\sigma^* c] = [\sigma'^* c']$$

という等式が成立するとき，$[c] \sim [c']$ が成立すると定める．$H^p(X,\mathcal{F})$ はそのようなチェックコホモロジー類の同値類からなる集合である．□

この定義に基づいてコホモロジー論としての一般的な性質が確かめられるわけだが，これによってコホモロジー群を具体的に求めることはほとんど不可能である．幸いにして，後述のルレイの定理のおかげで，ある条件が満たされればコホモロジー群は特定の開被覆 $\mathcal{U}$ に対するチェックコホモロジー群と同型であることが保証される．応用の場面ではこのことを利用して具体的な計算を行う．

ただし 0 次コホモロジー群については，開被覆に関する 0 次チェックコホモロジーについて見たことから次のように簡明な結果が得られる．

定理 4.1　X 上の任意のアーベル群の層 $\mathcal{F}$ に対して

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) \tag{4.14}$$

が成立する．

2　連結写像と長完全系列

層係数コホモロジーのもつ一般的性質の中でも特に基本的なものが長完全系列と呼ばれる完全系列の存在である．長完全系列にもいくつかの種類があるが，

ここで扱う長完全系列は層の短完全系列に伴うものである．層係数コホモロジーのさまざまな性質を説明する際にもこの長完全系列が技術的な鍵の一つとなる．

2.1　短完全系列と長完全系列

X 上の三つのアーベル群の層の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{4.15}$$

が与えられたとする．すなわち，ϕ, ψ は層準同型であり，各点の茎に対して決まる準同型 $\phi_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ および $\psi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ はそれぞれ単射・全射であるとする．

X の局所有限被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられれば，ϕ, ψ から開集合 $U \in \mathfrak{O}_X$ 上の断面の準同型

$$\Gamma(U, \mathcal{E}) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

を通じてコチェインのアーベル群の準同型（記号を節約するため，これらとそれに関連して以後現れる準同型をすべて同じ記号 ϕ, ψ で表す）

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\phi} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$$

が決まる．これらの準同型はコチェインの成分について見れば

$$c = (c_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}) \ \mapsto \ \phi(c) = (\phi(c_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}))$$

というものであり（ψ についても同様），余境界演算子と可換すなわち

$$\phi \circ \delta = \delta \circ \phi, \quad \psi \circ \delta = \delta \circ \psi \tag{4.16}$$

が成立する．こうして

$$\begin{array}{ccccc}
C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\
\delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\
C^{p}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & C^{p}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & C^{p}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\
\delta \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\
C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})
\end{array}$$

という可換図式（commutative diagram）が得られる．これから

$$\phi(Z^p(\mathcal{U},\mathcal{E})) \subseteq Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), \quad \psi(Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})) \subseteq Z^p(\mathcal{U},\mathcal{G}),$$
$$\phi(B^p(\mathcal{U},\mathcal{E})) \subseteq B^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), \quad \psi(B^p(\mathcal{U},\mathcal{F})) \subseteq B^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

ということがわかる．これによってチェックコホモロジー群の準同型

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \xrightarrow{\phi} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} H^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \tag{4.17}$$

が決まる．

開被覆 $\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V}$ が選択写像 σ とともに与えられれば，それぞれに関するコホモロジー群の間の準同型 σ^* と組み合わせた図式

$$\begin{array}{ccccc} H^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & H^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \\ \sigma^* \downarrow & & \sigma^* \downarrow & & \sigma^* \downarrow \\ H^p(\mathcal{V},\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^p(\mathcal{V},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & H^p(\mathcal{V},\mathcal{G}) \end{array}$$

も可換になる．これから帰納的極限における準同型の系列

$$H^p(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{\phi} H^p(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} H^p(X,\mathcal{G}) \tag{4.18}$$

が得られる．

さらに，あとで説明するように連結写像（connecting mapping）と呼ばれる準同型

$$\delta^* : H^p(X,\mathcal{G}) \to H^{p+1}(X,\mathcal{E})$$

が構成できる．これと上の ϕ, ψ を合わせると，すべての次数のコホモロジーをつなぐ長い準同型の系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^0(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\phi} & H^0(X,\mathcal{G}) \\ & \xrightarrow{\delta^*} & H^1(X,\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & H^1(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & H^1(X,\mathcal{G}) \\ & \xrightarrow{\delta^*} & \cdots & & & & \end{array} \tag{4.19}$$

が得られる．これについて次のことが成立する．

定理 4.2 (4.15) が完全系列ならば (4.19) も完全系列である．

(4.19) をコホモロジー長完全系列あるいは単に長完全系列（long exact sequence）という．これに対して最初の完全系列 (4.15) は短完全系列（short exact

sequence）と呼ばれる．以下では上の定理の証明（基本的にはそれぞれの準同型の核と像をていねいに調べるだけの作業である）の細部を省略して，連結写像の構成を重点的に解説する．ただし，0 次コホモロジー群の部分が完全系列をなすことは連結写像の構成の際の基礎になるので，その証明は省略しないで示す．定理の証明の残りの部分については参考文献 [112, 115] などを参照されたい．

2.2　長完全系列の 0 次コホモロジーの部分

0 次コホモロジー群は X 上の断面の集合に他ならないから，長完全系列の最初の部分は

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{\phi_X} \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_X} \Gamma(X,\mathcal{G}) \tag{4.20}$$

が完全系列であることを主張している．このことを $\Gamma(X,\,\cdot\,) : \mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ という対応[†6]の左完全性（left exactness）という．

補題 4.3　(4.15) が完全系列ならば (4.20) も完全系列である．

証明　まず ϕ_X の単射性を示そう．$s \in \Gamma(X,\mathcal{E})$ に対して $\phi_X(s) = 0$ であるとする．これは X の各点 x における $\phi_X(s)$ の芽がゼロであることを意味するが，ϕ の定める茎の準同型 $\phi_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ は単射であるから，s の芽 s_x 自体がゼロとなる．層の局所性条件によって，各点の芽がゼロであるような断面はそれ自体がゼロである．こうして $s = 0$ すなわち ϕ_X の単射性がわかる．

次に $\mathrm{Im}\,\phi_X = \mathrm{Ker}\,\psi_X$ であることを示そう．$\mathrm{Im}\,\phi_X \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi_X$ は明らかなので逆向きの包含関係が成立することを示せばよい．そのためには $s \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ に対して $\psi_X(s) = 0$ が成立するとして，$\phi_X(s') = s$ となるような $s' \in \Gamma(X,\mathcal{E})$ の存在を示せばよい．X の各点 x における茎の準同型の系列

$$\mathcal{E}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{G}_x$$

は完全系列であるから，x における s の芽 s_x は $\mathrm{Ker}\,\psi_x = \mathrm{Im}\,\phi_x$ に入る．すなわち x のある開近傍 N_x とその上の $\mathcal{E}$ の断面 $s'^x \in \Gamma(N_x,\mathcal{E})$ が存在して

[†6] 正確に言えば，X 上のアーベル群の層全体のなす圏からアーベル群全体のなす圏への共変函手（covariant functor）である．

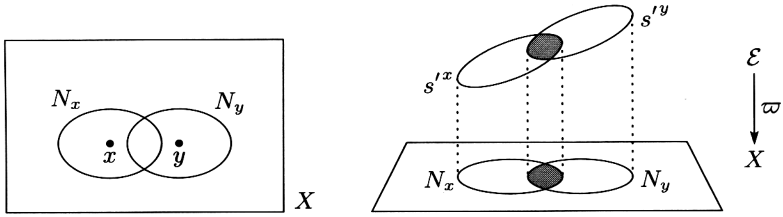


図 4.2　s'^x の貼り合せ

$$\phi(s'^x) = s|_{N_x}$$

となる．ここで ϕ は本来は ϕ_{N_x} と書かねばならないところだが，記号が重くなるので ϕ と略記する（以下同様の略記法に従う）．X の 2 点 x, y に対して $N_x \cap N_y \neq \emptyset$ であれば，共通集合 $N_x \cap N_y$ の上で

$$\phi(s'^x|_{N_x \cap N_y} - s'^y|_{N_x \cap N_y}) = s|_{N_x \cap N_y} - s|_{N_x \cap N_y} = 0$$

となるが，任意の開集合 U に対して $\phi_U : \Gamma(U, \mathcal{E}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ が単射であることは ϕ_X の単射性と同様にしてわかるから，結局

$$s'^x|_{N_x \cap N_y} - s'^y|_{N_x \cap N_y} = 0$$

という等式が成立する（図 4.2）．層の局所性条件から，これは局所的断面 s'^x が互いに貼り合わさって $\mathcal{E}$ の大域的断面 $s' \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ を定めることを意味する．この s' に対して $\phi_X(s') = s$ が成立する．□

注意　上の証明にならって考えれば，$\psi_X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$ が一般には全射でない理由も以下のように説明できる．$\mathcal{G}$ の大域的断面 $s \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ が与えられたとする．X の各点 x における茎の準同型 $\psi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ は全射なので，x のある開近傍 N_x とその上の局所的断面 $s'^x \in \Gamma(N_x, \mathcal{F})$ が存在して $\psi(s'^x) = s|_{N_x}$ となる．上の証明の後半と同様に考えれば

$$\psi(s'^x|_{N_x \cap N_y} - s'^y|_{N_x \cap N_y}) = s|_{N_x \cap N_y} - s|_{N_x \cap N_y} = 0$$

が成立するが，上の証明の場合と違って ψ は単射でないので，s'^x と s'^y は定義域の共通部分 $N_x \cap N_y$ で一般には食い違う（その差 $s'^x|_{N_x \cap N_y} - s'^y|_{N_x \cap N_y}$ が $\operatorname{Ker} \psi \simeq \mathcal{E}$ の $N_x \cap N_y$ 上の断面であることに注意されたい）．この不整合性をコホモロジーの言葉で表せば連結写像 $\delta^* : \Gamma(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{E})$ が得られる．

2.3　連結写像の構成

連結写像の構成は図式追跡（diagram chasing）というホモロジー代数の技法の典型的な応用例である．以下では与えられたコホモロジー類 $[c] \in H^p(X, \mathcal{G})$ に対して図式追跡を行って $H^{p+1}(X, \mathcal{E})$ の要素 $\delta^*([c])$ を定める．$H^p(X, \mathcal{G})$ の帰納的極限としての定義から c はある局所有限被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に関する $\mathcal{G}$ 係数のチェックコサイクル $c = (c_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$ と考えてよい．

i) 準備

図式追跡に持ち込むための準備として，$\mathcal{U}$ の適当な局所有限細分 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$（選択写像を $\sigma : B \to A$ とする）を選んで，それに関する $\mathcal{F}$ 係数の p コチェイン $c' = (c'_{\beta_0 \cdots \beta_p})$ で

$$\psi(c') = \sigma^* c \tag{4.21}$$

という等式が成立するようなものを一つ選ぶ．そのような細分とコチェインの存在は次のようにしてわかる．

1. X の各点 x において $\psi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ は全射であるから，次の各条件を満たすような x の開近傍 N_x が存在する：
   (a) $N_x \cap U_\alpha \neq \emptyset$ となるような U_α は有限個に限る．
   (b) $N_x \cap U_\alpha \neq \emptyset \Longrightarrow N_x \subseteq U_\alpha$.
   (c) $x \in U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$ となる p 単体 $(U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_s})$ に対して $s_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \in \Gamma(N_x, \mathcal{F})$ が存在して $\psi(s_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}) = c_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}|_{N_x}$ が成立する．反対称化を行えば，これらの $s_{\alpha_0 \cdots \alpha_p}$ は添字について完全反対称に選べる．
2. X の点でラベルづけされた開集合族 $\{N_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆であるから（ただし局所有限とは限らない），X のパラコンパクト性によって局所有限な細分 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ が存在する．$\mathcal{V}$ は前項の (b) によって $\mathcal{U}$ の細分にもなっている．その選択写像を $\sigma : B \to A$ とする．$\mathcal{V}$ の各 p 単体 $(V_{\beta_0}, \ldots, V_{\beta_p})$ に対して前項の (c) のような $s_{\sigma(\beta_0) \cdots \sigma(\beta_p)}$ が存在するので，$c' = (c'_{\beta_0 \cdots \beta_p}) \in C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ を

$$c'_{\beta_0 \cdots \beta_p} = s_{\sigma(\beta_0) \cdots \sigma(\beta_p)}|_{V_{\beta_0} \cap \cdots \cap V_{\beta_p}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^p(\mathcal{V},\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & C^p(\mathcal{V},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & C^p(\mathcal{V},\mathcal{G}) \\ & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & C^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & C^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{G}) \\ & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{p+2}(\mathcal{V},\mathcal{E}) & \xrightarrow{\phi} & C^{p+2}(\mathcal{V},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\psi} & C^{p+2}(\mathcal{V},\mathcal{G}) \end{array}$$

図 4.3 連結写像の定義に用いる可換図式

と定める．これが求めるものである．

ii) 図式追跡

ここで，いよいよ図式追跡に入る．対象となるのは図 4.3 に示した可換図式である．この可換図式の水平方向は $\mathcal{V}$ の単体ごとの完全系列

$$0 \longrightarrow \Gamma(\bigcap_{q=0}^{p} V_{\beta_q},\mathcal{E}) \xrightarrow{\phi} \Gamma(\bigcap_{q=0}^{p} V_{\beta_q},\mathcal{F}) \xrightarrow{\phi} \Gamma(\bigcap_{q=0}^{p} V_{\beta_q},\mathcal{G})$$

をまとめたものとその $p+1$ 次・$p+2$ 次のコチェインに対する対応物であるから，いずれも完全系列である．この可換図式の右上隅に $\sigma^*c = \psi(c')$ がある．c はコサイクルであるから $\delta(\sigma^*c) = \sigma^*(\delta c) = 0$ によって $\psi(c')$ もコサイクルである．右上の 4 角形の可換性から $\psi(\delta c') = \delta\psi(c') = 0$ がわかる．中段の系列の完全性によって ψ は全射であるから，ある $c'' \in C^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{E})$ が存在して

$$\phi(c'') = \delta c'$$

となる．今度は左下の 4 角形の可換性によって $\phi(\delta c'') = \delta\phi(c'') = \delta(\delta c') = 0$ がわかる．下段の系列の完全性によって ϕ は単射であるから

$$\delta c'' = 0$$

すなわち c'' はコサイクルである．要するに，右上隅の σ^*c から出発し，可換図式を階段状に左下までたどって c'' を得たことになる（図 4.4）．このコサイクル c'' の定めるコホモロジー類 $[c''] \in H^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{E})$ によって $\delta^*([c]) \in H^{p+1}(X,\mathcal{E})$ を

$$\begin{array}{ccccc} & & c' & \longrightarrow & \sigma^* c \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ c'' & \longrightarrow & \delta c' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \delta c'' & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

図 4.4　連結写像の定義における図式追跡

$$\delta^*([c]) = [c''] \tag{4.22}$$

と定義する（右辺は開被覆の細分に関する帰納的極限の要素と見なす）．実際には c'' に到るまでの過程でいろいろな任意性があるのだが，ていねいに調べることによって，そのような任意性は $H^{p+1}(X,\mathcal{E})$ の要素としての $[c'']$ には残らないことが確かめられる．こうして連結写像 $\delta^* : H^p(X,\mathcal{G}) \to H^{p+1}(X,\mathcal{E})$ の構成が終わる．

iii) 補足

改めて $\delta^* : H^0(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{E})$ について考えてみよう．この場合には c の各成分 c_α は $\mathcal{G}$ の大域的断面 $s \in \Gamma(X,\mathcal{G})$ によって $c_\alpha = s|_{U_\alpha}$ と表せる．これに対して $c' = (c'_\beta)$ と $c'' = (c''_{\beta_0\beta_1})$ を前述のように選ぶとき，次のことが証明できる．

補題 4.4　$[c''] = 0$ ならば $s \in \mathrm{Im}\,\psi_X$ であり，逆も成立する．

注意　これは

$$H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_X} H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X,\mathcal{E})$$

が完全系列であることを意味する．

証明　$[c''] = 0$ であるとする．これは $c'' = \delta b'$ となるような $b' = (b'_\alpha) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{E})$ が存在することを意味する．このとき $\delta c' = \phi(c'') = \delta\phi(b')$ だから $c' - \phi(b')$ は 0 次コサイクルであり，したがって $\mathcal{F}$ の大域的断面 $s' \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ に対応する．この s' に対して $s = \psi_X(s')$ となることはただちにわかる．逆に

$s' \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ によって s が $s = \psi_X(s')$ と表せるとする．このとき $c' = (c'_\beta)$ は $c'_\beta = s|_{V_\beta}$ と選べる．$\delta c' = 0$ なので c'' は 0 に選べる．特に $[c''] = 0$ となる．□

3　その他の一般的性質

この節では層係数コホモロジーの一般的な性質の中から基本的なものをいくつか取り上げて紹介する．これらはいずれも，細分に関する帰納的極限という抽象的で扱いにくいものに対して，具体的で取扱いが可能な表現を与える．層係数コホモロジーの一般的性質にはここで示すもの以外にも重要なものがいろいろある．参考文献 [112, 115] などを参照されたい．

3.1　細層

定義　X のアーベル群の層 $\mathcal{F}$ を考える．X の任意の局所有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して次の条件を満たす層準同型 $\chi_\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ の族 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在するとき $\mathcal{F}$ は細層（fine sheaf）であるという．また $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をこの細層の 1 の分解（partition of unity）と呼ぶ．

1. 各 $\alpha \in A$ に対して $\mathrm{supp}\ \chi_\alpha \subseteq U_\alpha$．ここで $\mathrm{supp}\chi_\alpha$ は χ_α の台（support）すなわち $\{x \in X \mid \chi_{\alpha,x} \neq 0\}$ の閉包である（$\chi_{\alpha,x}$ は χ_α が茎に定める準同型 $\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ を表す）．
2. $\displaystyle\sum_{\alpha \in A} \chi_\alpha = \mathrm{id}$．ここで id は $\mathcal{F}$ の恒等準同型（各茎において恒等写像となる）を表す．

例　実多様体 M 上の p 次 C^∞ 級微分形式の層 $\mathcal{A}^p_M$ や複素多様体 X 上の (p,q) 型 C^∞ 級微分形式の層 $\mathcal{A}^{p,q}_X$ は細層である．実際，与えられた局所有限開被覆に対して C^∞ 級函数からなる 1 の分解 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在し[†7]，それをこれらの層の要素に乗じること $\omega \mapsto \chi_\alpha \omega$ によって決まる準同型が上の意味での層の 1 の分解を与える．

[†7] 参考文献 [120] を参照されたい．

定理 4.3（細層のコホモロジーの消滅） $\mathcal{F}$ が細層ならば，任意の局所有限開被覆 $\mathcal{U}$ と $p>0$ に対して $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ となる．特に

$$H^p(X,\mathcal{F})=0 \quad (p>0) \tag{4.23}$$

が成立する．

証明（概略） $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と表そう．$c=(c_{\alpha_0}\cdots c_{\alpha_p})\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ がコサイクルであるとする．このとき

$$c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}-c_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_p}+\cdots-(-1)^p c_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}}=(\delta c)_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_p}=0$$

という等式が $U_\alpha\cap U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}$ の上で成立する．この式に χ_α を適用して $\alpha\in A$ にわたって総和すれば

$$c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}-\sum_{\alpha\in A}\chi_\alpha(c_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_p})+\cdots-(-1)^p\sum_{\alpha\in A}\chi_\alpha(c_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_{p-1}})=0$$

を得る．そこで $c'=(c'_{\alpha_1\cdots\alpha_p})\in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ を

$$c'_{\alpha_1\cdots\alpha_p}=\sum_{\alpha\in A}\chi_\alpha(c_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_p})$$

（右辺の各項は $U_\alpha\setminus(U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p})$ 上では 0 であると見なす）と定義すれば，$\delta c'=c$ が成立することがわかる．任意のコサイクルがコバウンダリとなるので $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ が成立する．したがって細分に関する帰納的極限として $H^p(X,\mathcal{F})=0$ も成立する．□

3.2　細分解

定義 X 上のアーベル群の層 $\mathcal{E}$ に対して $\mathcal{E}$ と細層 $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots$ からなる完全系列

$$0\longrightarrow\mathcal{E}\xrightarrow{\iota}\mathcal{F}_0\xrightarrow{\phi_0}\mathcal{F}_1\xrightarrow{\phi_1}\cdots \tag{4.24}$$

を $\mathcal{E}$ の細分解（fine resolution）という．

定理 4.4（細分解によるコホモロジーの表示） $\mathcal{E}$ に対する細分解 (4.24) が与えられれば，すべての次数において

$$H^p(X, \mathcal{E}) \simeq \frac{\operatorname{Ker}\phi_p : \Gamma(X, \mathcal{F}_p) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_{p+1})}{\operatorname{Im}\phi_{p-1} : \Gamma(X, \mathcal{F}_{p-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_p)} \tag{4.25}$$

が成立する．

証明（概略）　$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{E}$ および $\mathcal{Z}_p = \operatorname{Ker}\phi_p = \operatorname{Im}\phi_{p-1}$ （$p > 0$）を導入して (4.24) を短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{Z}_{p+1} \longrightarrow 0$$

の集まりに分解する．この短完全系列に付随する長完全系列は細層のコホモロジーの消滅 $H^q(X, \mathcal{F}_p) = 0$ （$q > 0$）によって長さ 4 の完全系列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}_p) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{Z}_{p+1}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{Z}_p) \longrightarrow 0$$

と同型

$$H^q(X, \mathcal{Z}_{p+1}) \simeq H^{q+1}(X, \mathcal{Z}_p) \quad (q > 0)$$

に分かれる．後者を繰り返し用いれば $H^p(X, \mathcal{E}) = H^p(X, \mathcal{Z}_0)$ （$p > 0$）に対して

$$H^p(X, \mathcal{E}) \simeq H^1(X, \mathcal{Z}_{p-1})$$

という同型が得られる．前者で p を $p-1$ にずらしたものから

$$H^1(X, \mathcal{Z}_{p-1}) \simeq \frac{\Gamma(X, \mathcal{Z}_p)}{\operatorname{Im}\bigl(\Gamma(X, \mathcal{F}_{p-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{Z}_p)\bigr)}$$

がわかるので，それと組み合わせれば

$$H^p(X, \mathcal{E}) \simeq \frac{\Gamma(X, \mathcal{Z}_p)}{\operatorname{Im}\bigl(\Gamma(X, \mathcal{F}_{p-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{Z}_p)\bigr)}$$

となる．さらに，上の長さ 4 の完全系列に注意しながら可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \Gamma(X, \mathcal{Z}_{p+1}) & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
\Gamma(X, \mathcal{F}_{p-1}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}_p) & & \longrightarrow & & \Gamma(X, \mathcal{F}_{p+1}) \\
 & \searrow & & \nearrow & & & \\
 & & \Gamma(X, \mathcal{Z}_p) & & & &
\end{array}$$

に対して図式追跡を行えば

$$\Gamma(X,\mathcal{Z}_p)\simeq \mathrm{Ker}\big(\Gamma(X,\mathcal{F}_p)\to\Gamma(X,\mathcal{F}_{p+1})\big),$$
$$\mathrm{Im}\big(\Gamma(X,\mathcal{F}_{p-1})\to\Gamma(X,\mathcal{Z}_p)\big)\simeq \mathrm{Im}\big(\Gamma(X,\mathcal{F}_{p-1})\to\Gamma(X,\mathcal{F}_p)\big)$$

という同型が確かめられる．□

例 実多様体 M 上のドラーム複体に付随する完全系列

$$0\longrightarrow \boldsymbol{R}_M\xrightarrow{\ \iota\ }\mathcal{A}^0_M\xrightarrow{\ d\ }\cdots\xrightarrow{\ d\ }\mathcal{A}^n_M\longrightarrow 0$$

および複素多様体 X 上のドルボー複体に付随する完全系列

$$0\longrightarrow \Omega^p_X\xrightarrow{\ \iota\ }\mathcal{A}^{p,0}_X\xrightarrow{\ \bar\partial\ }\cdots\xrightarrow{\ \bar\partial\ }\mathcal{A}^{p,n}_X\longrightarrow 0$$

はそれぞれ定数層 $\boldsymbol{R}_M$ と正則微分形式の層 Ω^p_X の細分解である．したがってドラームコホモロジーやドルボーコホモロジーと層係数コホモロジーの間に同型

$$H^q_{\mathrm{dR}}(M)\simeq H^q(M,\boldsymbol{R}_M),\quad H^{p,q}_{\bar\partial}(X)\simeq H^q(X,\Omega^p_X) \tag{4.26}$$

が得られる．正則線形束 L を係数とするドルボーコホモロジーについても同様のこと

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X,L)\simeq H^q(X,\Omega^p_X(L)) \tag{4.27}$$

が言える．

定理 4.5（細分解の存在） 任意の層に対して細分解が存在する．

証明（概略） 与えられたアーベル群の層 $\mathcal{E}$ に対して $\mathcal{E}$ を層空間 $\varpi:\mathcal{E}\to X$ と見なして，X の開集合 $U\in\mathfrak{O}_X$ の上の不連続性を許した断面の集合

$$\mathcal{F}_0(U)=\{s\mid s:U\to\mathcal{E}\ (\text{単なる写像}),\ \varpi\circ s=\mathrm{id}_U\}$$

を考える．対応 $U\mapsto\mathcal{F}_0(U)$ によって定義される前層 $\mathcal{F}_0$ は細層であることがわかる．$\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}_0$ には自然な単射 $\iota:\mathcal{E}\to\mathcal{F}_0$ があり，したがって完全系列

$$0\longrightarrow\mathcal{E}\xrightarrow{\ \iota\ }\mathcal{F}_0$$

ができる．今度は $\mathcal{E}$ の代わりに $\mathcal{F}_0/\mathcal{E}$ に対して上のような不連続断面の細層 $\mathcal{F}_1$ を構成すれば，上の完全系列を

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{F}_1$$

に延ばせる．これを繰り返す．□

注意　この証明で得られる層の分解はゴドマン（R. Godement）によって与えられたもので，ゴドマン分解（Godement resolution）と呼ばれることもある．この分解は細分解よりもむしろ脆弱分解（flabby resolution）として知られている．一般に，層 $\mathcal{F}$ において任意の開集合 $U \in \mathfrak{O}_X$ に対する制限写像 $\Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(U,\mathcal{F})$ が全射であるとき，$\mathcal{F}$ は脆弱層（flabby sheaf）であるという．ゴドマン分解に現れる層 $\mathcal{F}_p$ はすべて脆弱である．脆弱分解はチェックコホモロジーとは異なる流儀で層係数コホモロジーを定式化する際の基礎となる．参考文献 [46, 112] を参照されたい．

3.3　ルレイの定理

ルレイの定理は帰納的極限に移行する前のチェックコホモロジー群 $H^q(\mathcal{U},\mathcal{E})$ が移行後の $H^q(X,\mathcal{E})$ と同型になるための十分条件を与える．これによってコホモロジー群の具体的な計算への道が開ける．

定義　局所有限な開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の任意の p 単体 $(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_p})$ が

$$H^q(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p},\mathcal{E}) = 0 \quad (q > 0) \tag{4.28}$$

という条件を満たすとき，$\mathcal{U}$ は層 $\mathcal{E}$ に関して非輪状（acyclic）であるという．

定理 4.6（ルレイの定理）　局所有限開被覆 $\mathcal{U}$ が $\mathcal{E}$ に関して非輪状ならば，すべての次数において

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \simeq H^p(X,\mathcal{E}) \tag{4.29}$$

が成立する．

証明（概略）　$\mathcal{E}$ の細分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\phi_1} \cdots$$

を一つ選ぶ．これから図 4.5 の可換図式が得られる．$\mathcal{U}$ の任意の p 単体

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{E}) & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & \Gamma(X,\mathcal{F}_0) & \stackrel{\phi_0}{\longrightarrow} & \Gamma(X,\mathcal{F}_1) & \stackrel{\phi_1}{\longrightarrow} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U},\mathcal{E}) & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}_0) & \stackrel{\phi_0}{\longrightarrow} & C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}_1) & \stackrel{\phi_1}{\longrightarrow} & \cdots \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U},\mathcal{E}) & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}_0) & \stackrel{\phi_0}{\longrightarrow} & C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}_1) & \stackrel{\phi_1}{\longrightarrow} & \cdots \\
 & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

図 4.5　ルレイの定理の証明に用いられる可換図式

$(U_{\alpha_0},\dots,U_{\alpha_p})$ に対して $U = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$ 上の細分解によるコホモロジーの表示定理を適用すれば

$$H^q(U,\mathcal{E}) \simeq \frac{\operatorname{Ker}\phi_q : \Gamma(U,\mathcal{F}_q) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_{q+1})}{\operatorname{Im}\phi_{q-1} : \Gamma(U,\mathcal{F}_{q-1}) \to \Gamma(U,\mathcal{F}_q)}$$

という同型が得られるが，非輪状性の仮定からこれは $q > 0$ に対して消えるので

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{E}) \stackrel{\iota}{\longrightarrow} \Gamma(U,\mathcal{F}_0) \stackrel{\phi_0}{\longrightarrow} \Gamma(U,\mathcal{F}_1) \stackrel{\phi_1}{\longrightarrow} \cdots$$

は完全系列である（ι と ϕ_0 からなる部分が完全系列であることは長完全系列の 0 次の部分の完全性と同様にしてわかる）．これは図 4.5 の可換図式の水平方向が最上段を除いて完全系列であることを意味する．他方，垂直方向は細層のコチェインの複体に大域的断面のアーベル群を付け加えたものであるから，最左列以外は細層のコホモロジーの消滅定理によって完全系列である．これらのことを踏まえて以下のような階段状の図式追跡（図 4.6）を行えば，最左列のコホモロジー群

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \simeq Z^p(\mathcal{U},\mathcal{E})/B^p(\mathcal{U},\mathcal{E})$$

と最上段のコホモロジー群

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & c_p & \longrightarrow & \phi_p(c_p) \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & & & \cdot & \longrightarrow & c'_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \cdot & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & c_0 & \longrightarrow & c'_1 & \longrightarrow & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
c & \longrightarrow & c'_0 & \longrightarrow & 0 & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

図 4.6　ルレイの定理の証明における図式追跡

$$
H^p(X,\mathcal{E}) \simeq \frac{\operatorname{Ker}\phi_p : \Gamma(X,\mathcal{F}_p) \to \Gamma(X,\mathcal{F}_{p+1})}{\operatorname{Im}\phi_{p-1} : \Gamma(X,\mathcal{F}_{p-1}) \to \Gamma(X,\mathcal{F}_p)}
$$

（細分解によるコホモロジーの表現を用いた）の間に同型が得られる．まず前者から後者への準同型 $H^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to H^p(X,\mathcal{E})$ を構成しよう．任意のチェックコサイクル $c \in Z^p(\mathcal{U},\mathcal{E})$ から出発する．c'_0 を

$$
c'_0 = \iota(c) \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}_0)
$$

と定めると，図式の可換性から $\delta c'_0 = \iota(\delta c) = 0$ となる．$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}_0)$ とその上下を結ぶ系列の完全性によって，ある $c_0 \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_0)$ が存在して

$$
\delta c_0 = c'_0
$$

となる．c'_1 を

$$
c'_1 = \phi_0(c_0) \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_1)
$$

と定めると，図式の可換性から $\delta c'_1 = \phi_0(\delta c_0) = 0$ となる．これを繰り返して

$$
\delta c_i = c'_i, \quad \phi_i(c_i) = c'_{i+1}
$$

という関係に従う一連のチェックコサイクル $c'_i \in Z^{p-i}(\mathcal{U},\mathcal{F}_i)$ （$i = 0,\ldots,p$）とチェックコチェイン $c_i \in C^{p-i-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}_i)$ （$i = 0,\ldots,p-1$）が得られる．最

後の $c'_p \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_p)$ は最上段の $\Gamma(X, \mathcal{F}_p)$ の要素 c_p を定めるが，図式の可換性と $\phi_p(c'_p) = \phi_p(\phi_{p-1}(c_{p-1})) = 0$ という等式が成立することから，$\phi_p(c_p)$ の準同型 $\Gamma(X, \mathcal{F}_{p+1}) \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{p+1})$ による像は 0 であることがわかる．この準同型は単射なので $\phi_p(c_p) = 0$ すなわち

$$c_p \in \operatorname{Ker} \phi_p : \Gamma(X, \mathcal{F}_p) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_{p+1})$$

となる．以上の構成をていねいに見直せば，c にコバウンダリを加えること $c \to c + \delta b$ や途中の c'_0, c_0, ..., c_{p-1}, c'_p の選び方を変えることによって c_p に生じる変化は

$$c_p \;\to\; c_p + \phi_{p-1}(b_{p-1}), \quad b_{p-1} \in \Gamma(X, \mathcal{F}_{p-1}),$$

というものに限られることが確かめられる．こうして $H^p(X, \mathcal{E})$ の要素 $[c_p]$ が矛盾なく定まり，$[c] \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{E})$ に $[c_p]$ を対応させることによって準同型 $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \to H^p(X, \mathcal{E})$ が定まる．逆向きの準同型が上と同様の図式追跡によって定義できることから，この準同型が同型であることがわかる．□

4　斉次正則函数の層のコホモロジー

無質量場の積分表示をコホモロジー的に解釈するための鍵は複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$ 上の斉次正則函数の層 $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(m) = \mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(H^{\otimes m})$ のコホモロジーにある．$\mathbf{CP}^1$ を 2 個の開集合で覆うことによって，このコホモロジーはチェックコホモロジーとして具体的に記述できる．そこから自然に周回積分が現れる．同じ議論をツイスター直線に適用すれば，クライン対応を通じてスピナー場の積分表示が得られる．

4.1　複素射影直線上の斉次正則函数の層のコホモロジー

$\mathbf{CP}^1$ の斉次座標を $\xi = (\xi_0, \xi_1)$ とする．$\mathbf{CP}^1$ を 2 個の開集合

$$D_0 = \{[\xi] \in \mathbf{CP}^1 \mid \xi_0 \neq 0\}, \quad D_1 = \{[\xi] \in \mathbf{CP}^1 \mid \xi_1 \neq 0\}$$

で覆う．これらはいずれも $\boldsymbol{C}$ に正則同型であり，その上で H^m が自明化されるので，層の同型

$$\mathcal{O}(m)|_{D_\alpha} \simeq \mathcal{O}_{D_\alpha} \quad (\alpha = 0, 1) \tag{4.30}$$

が成立する（記号が煩雑になるので，$\mathbf{CP}^1$ を考えている間は添字の "$\mathbf{CP}^1$" を省略する）．したがってコホモロジーについてもすべての次数で同型 $H^q(D_\alpha, \mathcal{O}(m)) \simeq H^q(\boldsymbol{C}, \mathcal{O})$ が成立する．さらに，ドルボーコホモロジーと層係数コホモロジーの対応関係によって $H^q(\boldsymbol{C}, \mathcal{O}) \simeq H^{0,q}_{\bar\partial}(\boldsymbol{C})$ という同型があるが，第3章で多重円盤に関して見たことによれば，$q > 0$ に対してドルボーコホモロジーの消滅定理 $H^{0,q}_{\bar\partial}(\boldsymbol{C}) = 0$ が成立する（そこでの議論は円盤の半径が無限大になっても通用する）．結局

$$H^q(D_\alpha, \mathcal{O}(m)) = 0 \quad (q > 0) \tag{4.31}$$

すなわち $\mathbf{CP}^1$ の開被覆 $\{D_0, D_1\}$ が $\mathcal{O}(m)$ に関して非輪状であることがわかる．したがってルレイの定理によりすべての次数で

$$H^q(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) \simeq H^q(\{D_0, D_1\}, \mathcal{O}(m)) \tag{4.32}$$

が成立する．0次コホモロジーはもちろん

$$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) = \Gamma(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) \tag{4.33}$$

で与えられる．1次コホモロジーは

$$H^1(\{D_0, D_1\}, \mathcal{O}(m)) \simeq \Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O}(m)) / \operatorname{Im} \delta \tag{4.34}$$

という商線形空間として表せる．ここで δ は余境界演算子を言い換えたもの

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D_0, \mathcal{O}(m)) \oplus \Gamma(D_1, \mathcal{O}(m)) & \to & \Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O}(m)) \\ (g, h) & \mapsto & h - g \end{array}$$

である．$\Gamma(D_\alpha, \mathcal{O}(m))$ を $\Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O}(m))$ の線形部分空間と見なせば，これは

$$H^1(\{D_0, D_1\}, \mathcal{O}(m)) \simeq \frac{\Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O}(m))}{\Gamma(D_0, \mathcal{O}(m)) + \Gamma(D_1, \mathcal{O}(m))} \tag{4.35}$$

というように表せる．2次以上のコホモロジーは消える．

0次と1次のコホモロジーについて立ち入って調べてみよう．

i) 0 次コホモロジー

$\Gamma(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))$ は $\boldsymbol{C}^2 \setminus \{0\}$ 全体で定義された m 次斉次正則函数 $f(\xi)$ からなる．$m < 0$ ならばそのような函数はゼロに限るが，$m \geq 0$ ならば $\xi_0^m, \xi_0\xi_1^{m-1}, \ldots, \xi_1^m$ の線形結合すなわち m 次斉次多項式となる．これはよく知られたことであるが，念のため直接確かめておこう．

D_0 上の非斉次座標 $\zeta = \xi_1/\xi_0$ を用いれば $f(\xi)$ は

$$f(\xi) = \xi_0^m f(1, \zeta)$$

と表せる．$f(1,\zeta)$ は ζ について $\boldsymbol{C}$ 全体で定義された正則函数すなわち整函数である．他方，D_1 上の非斉次座標 $\eta = \xi_0/\xi_1$ を用いれば，$f(\xi)$ は

$$f(\xi) = \xi_1^m f(\eta, 1)$$

と表せて，$f(\eta, 1)$ は η の整函数である．この二つの表示は $D_0 \cap D_1$ 上で

$$f(1,\zeta) = \zeta^m f(\eta, 1), \quad \zeta = \eta^{-1}$$

という関係にある．このことから，1 変数複素函数に関するリウビルの定理 (Liouville's theorem) を援用して次のことがわかる．

1. $m > 0$ のとき $f(1,\zeta)$ は整函数で無限遠点 $\zeta = \infty$ において高々 m 位の極をもつ．そのような函数は高々 m 次の多項式 $c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_m\zeta^m$ に等しい．これをもとの $f(\xi)$ に戻せば m 次斉次多項式の一般的表示
$$f(\xi) = c_0\xi_0^m + c_1\xi_0^{m-1}\xi_1 + \cdots + c_m\xi_1^m$$
になる．
2. $m = 0$ のとき $f(1,\zeta)$ は整函数で有界である．そのような函数は定数に限る．
3. $m < 0$ のとき $f(1,\zeta)$ は整函数で無限遠点 $\zeta = \infty$ において $-m$ 位の零点をもつ．そのような函数は恒等的にゼロのものに限る．

以上のことをまとめると，0 次コホモロジーは次のようになる：

$$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) \simeq \begin{cases} S^m(\boldsymbol{C}^2) & (m \geq 0) \\ 0 & (m < 0) \end{cases} \tag{4.36}$$

ここで，ξ_0, ξ_1 を 2 次元線形空間 $\boldsymbol{C}^2$ の座標と考えて，m 次対称積 $S^m(\boldsymbol{C}^2)$

の要素を上に述べたような m 次斉次多項式と同一視した．これがスピナーとの関係を理解する上で本質的な見方である，ということがあとでわかる．

ii) 1 次コホモロジー

チェックコホモロジーの表示 (4.35) に現れた斉次正則函数の集合を非斉次座標で表してみよう．

$\Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O}(m))$ の要素は $\{\xi \in \boldsymbol{C}^2 \mid \xi_0 \neq 0, \xi_1 \neq 0\}$ で定義された m 次斉次正則函数 $f(\xi)$ である．再び D_0 上の非斉次座標 $\zeta = \xi_1/\xi_0$ を用いて $f(\xi) = \xi_0^m f(1, \zeta)$ と表せば，$f(\xi) \mapsto f(1, \zeta)$ という対応によって

$$\Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O}(m)) \simeq \{F(\zeta) \mid F(\zeta) \text{ は } \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \text{ 上の正則函数}\}$$

という複素線形空間の同型が得られる．$\Gamma(D_0, \mathcal{O}(m))$ と $\Gamma(D_1, \mathcal{O}(m))$ はこの中で

$$\Gamma(D_0, \mathcal{O}(m)) \simeq \{G(\zeta) \mid G(\zeta) \text{ は } \boldsymbol{C} \text{ 上の正則函数}\},$$
$$\Gamma(D_1, \mathcal{O}(m)) \simeq \{\zeta^m H(\zeta^{-1}) \mid H(\eta) \text{ は } \boldsymbol{C} \text{ 上の正則函数}\}$$

というように特徴づけられる．右辺のそれぞれに属する正則函数は $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上で

$$F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \zeta^n, \quad G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \zeta^n, \quad \zeta^m H(\zeta^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \zeta^{m-n}$$

というローラン展開をもつ．左辺でこれらに対応する ξ の m 次斉次正則函数は

$$f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \xi_0^{m-n} \xi_1^n, \quad g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi_0^{m-n} \xi_1^n, \quad h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \xi_0^n \xi_1^{m-n}$$

となる．

以上のことに注意して (4.35) の商空間を考えれば，$m > -2$ の場合には $f(\xi)$ から $h(\xi) - g(\xi)$ の形の項を消すことで $f(\xi) = 0$ に帰着できる．他方 $m \leq -2$ の場合には，$\xi_0^{m+1}\xi_1^{-1}, \xi_0^{m+2}\xi_1^{-2}, \ldots, \xi_0^{-1}\xi_1^{m+1}$ が消えずに残る．すなわち

$$f(\xi) = f_{-1}\xi_0^{m+1}\xi_1^{-1} + f_{-2}\xi_0^{m+2}\xi_1^{-2} + \cdots + f_{m+1}\xi_0^{-1}\xi_1^{m+1}$$

という形の函数が (4.35) の商線形空間の要素を代表する．したがって 1 次コホモロジーは次のようになる：

$$H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) \simeq \begin{cases} 0 & (m > -2) \\ \boldsymbol{C}^{-m-1} & (m \leq -2) \end{cases} \tag{4.37}$$

4.2　周回積分とセール双対性

上に示した 1 次コホモロジーの計算結果は $m \to -m-2$ と置き換えて

$$H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2)) \simeq \begin{cases} \boldsymbol{C}^{m+1} & (m \geq 0) \\ 0 & (m < 0) \end{cases} \tag{4.38}$$

と書き直す方が見やすいだろう．この書き換えによって 0 次コホモロジーとの類似性も見えてくる．実際，$S^m(\boldsymbol{C}^2) \simeq \boldsymbol{C}^{m+1}$ に注意すれば，0 次コホモロジーの計算結果もこれと似た形

$$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) \simeq \begin{cases} \boldsymbol{C}^{m+1} & (m \geq 0) \\ 0 & (m < 0) \end{cases} \tag{4.39}$$

をしていることがわかる．

これはコンパクト複素多様体において一般的に成立するセール双対性（Serre duality）[†8]を $\mathbf{CP}^1$ の場合に見ていることになる．この場合のセール双対性は

$$H^0(\mathbf{CP}^1, \Omega^1(-m)) \simeq H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))^* \tag{4.40}$$

という同型を意味する．ここで $\Omega^1(-m)$ は 1 次正則微分の層 Ω^1 と $\mathcal{O}(-m)$ の $\mathcal{O}$ 上のテンサー積（言い換えれば H^{-m} を係数とする 1 次正則微分形式の層）を表す．またこの式の右辺は $H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))$ の複素線形空間としての双対空間を表す．D_0, D_1 の上で局所座標を用いて調べれば $\Omega^1 \simeq \mathcal{O}(-2)$ という同型が成立していることがわかるので，上の式は

$$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2)) \simeq H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))^*$$

と言い換えられる．ここで $m \to -m-2$ と置き換えたもの

$$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m)) \simeq H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2))^*$$

がこれまでの計算結果と対応する．このことから特に，0 次と 1 次のコホモロジーの計算結果に $\boldsymbol{C}^{m+1}$ が現れていても，これらは同じものではなくて互いに双対空間と考えなければならない，ということがわかる．

$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))$ としての $\boldsymbol{C}^{m+1}$ は m 次斉次多項式を通じて対称積 $S^m(\boldsymbol{C}^2)$

[†8] 一般の場合については参考文献 [33, 115] などを参照されたい．

の構造をもっていた．じつは $H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2))$ にも同様の構造がある．前述のチェックコホモロジーの計算を振り返れば，

$$H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2)) \simeq \boldsymbol{C}^{m+1}$$

という同型は $\Gamma(D_0 \cap D_1, \mathcal{O})$ の要素 $f(\xi)$ に対して $f(1,\zeta)$ のローラン展開の展開係数を対応させる写像 $f \mapsto (f_{-1}, \ldots, f_{-m-1})$ によって得られるのだった．これらの係数は

$$f_{-1} = \oint f(1,\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i}, \ \ldots, \ f_{-m-1} = \oint \zeta^m f(1,\zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i}$$

というように周回積分で書ける（積分路は $\zeta = 0$ の周りを回る適当な半径の円周 $|\zeta| = r$ に選べばよい）．さらに

$$f_{k-m-1} = f_{\underbrace{0\cdots0}_{k}\underbrace{1\cdots1}_{m-k}}$$

という対応でローラン係数を m 個の添字 $a_1, \ldots, a_m = 0, 1$ をもつ「スピナー」$f_{a_1\cdots a_m}$ に翻訳すれば，上の周回積分は無質量自由場の積分表示でおなじみの形

$$f_{a_1\cdots a_m} = \oint \xi_{a_1}\cdots\xi_{a_m} f(\xi)\frac{\xi_b d\xi^b}{2\pi i} \tag{4.41}$$

にまとめられる．したがって前掲の $\boldsymbol{C}^{m+1}$ との同型もじつは

$$H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2)) \simeq S^m(\boldsymbol{C}^2) \tag{4.42}$$

と書き直せるのである．

ここに現れた対称積 $S^m(\boldsymbol{C}^2)$ が 0 次コホモロジーに現れたものの双対空間であることは次のようにしてわかる．$H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))$ は m 次斉次多項式 $g(\xi) = g^{a_1\cdots a_m}\xi_{a_1}\cdots\xi_{a_m}$ からなる．それと上の $f_{a_1\cdots a_m}$ との間に非退化なペアリングを

$$g^{a_1\cdots a_m} f_{a_1\cdots a_m} = \oint g(\xi) f(\xi)\frac{\xi_b d\xi^b}{2\pi i} \tag{4.43}$$

と定めることができる．これにより $H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(m))$ と $H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(-m-2))$ が互いに双対空間となる．こうしてセール双対性の主張を周回積分によって定式化することができる．

ここではもっぱらチェックコホモロジーを用いて議論してきたが，第2章の最後に触れた方法で周回積分を面積分に書き直せば，ここで見たことをドルボーコホモロジーによって見直すこともできる．それはセール双対性の通常の取扱いに近い考え方だが，ここではこれ以上は立ち入らない．

4.3 スピナー場の積分表示の解釈

これまでの考察によって，スカラー場（$s=0$）あるいは正ヘリシティのスピナー場（$s>0$）の積分表示と本質的に同じものが $\mathbf{CP}^1$ の上の斉次正則函数の層 $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m-2)$（$m=2s$）の1次コホモロジーから自然に現れることがわかった．ただし，ここにはまだ時空座標が入っていない．

時空依存性を取り入れるため，幾何学的舞台を単独の複素射影直線からクライン対応

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{F} = \mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{T}) & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ \mathbf{CM}^{\#} = \mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T}) & & \mathbf{PT} \end{array}$$

に移す．この図式によって，コンパクト化された複素時空 $\mathbf{CM}^{\#}$ の各点 x には $\mathbf{CP}^1$ と正則同型な1次元部分多様体 $p_2^{-1}(x) \subset \boldsymbol{F}$ あるいは $p_1(p_2^{-1}(x)) \subset \mathbf{PT}$ が対応する．後者を特にツイスター直線と呼び Γ_x という記号で表したわけだが，以後の議論ではむしろその $\boldsymbol{F}$ における化身 $p_2^{-1}(x)$ が基本的な役割を演じることになる．正ヘリシティの無質量自由場の積分表示

$$\psi_{\dot a_1\cdots\dot a_m}(x) = \oint_{C_x} \lambda_{\dot a_1}\cdots\lambda_{\dot a_m} f(ix^{a\dot a}\lambda_{\dot a}, \lambda_{\dot a})\frac{\lambda_{\dot b}d\lambda^{\dot b}}{2\pi i} \tag{4.44}$$

は旗多様体やツイスター空間の中を動くこれらの複素射影直線に関係している．この積分表示をコホモロジーの言葉で解釈するのがこれからの議論の目標である．第2章の最後の部分では便宜上ツイスター空間の部分集合上の層係数コホモロジーの言葉を用いたが，技術的にはむしろ旗多様体の部分集合上の層係数コホモロジーを用いる方が都合がよいので，以下では旗多様体の上で議論を進める．

積分表示の中の $f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}},\lambda_{\dot{a}})$ はツイスター空間（正確には線形ツイスター空間 $\boldsymbol{T}$）の部分集合上の $-m-2$ 次斉次正則函数 $f(\mu^a,\lambda_{\dot{a}})$ を p_1 によって旗多様体に引き戻したものである．層の言葉を用いれば，これは $\mathbf{PT}$ 上の斉次正則函数の層 $\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)$ の $\boldsymbol{F}$ への逆像 $p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)$ の断面と見なすことができる．5節ではこの層を係数とするコホモロジーによって無質量自由場の積分表示を解釈する．

以下では5節への準備として，より一般的な被積分函数 $f(x^{a\dot{a}},\lambda_{\dot{a}})$（$\lambda$ について $-m-2$ 次斉次とする）に対する周回積分

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m}(x)=\oint_{C_x}\lambda_{\dot{a}_1}\cdots\lambda_{\dot{a}_m}f(x^{a\dot{a}},\lambda_{\dot{a}})\frac{\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} \tag{4.45}$$

のコホモロジー的解釈を考える（この周回積分は場の方程式を満たすとは限らない一般の正則スピナー場を与える）．$f(x^{a\dot{a}},\lambda_{\dot{a}})$ は $\mathbf{PT}$ 上の正則線形束 $H^{\otimes(-m-2)}$ の $\boldsymbol{F}$ への引き戻し $p_1^*H^{\otimes(-m-2)}$（5節を参照されたい）の正則断面と見なせる．$p_1^*H^{\otimes(-m-2)}$ の正則断面の層を $\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ という記号で表す．この層を係数とするコホモロジーによって上の周回積分が解釈できることを示そう．

第2章の設定に従ってある時空領域 W における正則スピナー場を考察の対象とする．話を簡単にするため W が $\mathbf{CM}=\mathrm{Gr}(2,\boldsymbol{T})'$ に含まれる場合のみ考えよう（一般の場合を考えるにはスピナー場を $\mathbf{CM}^{\#}$ 上のスピナー束の断面として扱う必要がある）．このとき $V=p_2^{-1}(W)$ は $\boldsymbol{F}'=p_2^{-1}(\mathbf{CM})$ に含まれている．第2章で説明したように，正則同型

$$\boldsymbol{F}'\simeq\mathbf{CM}\times\mathbf{CP}^1 \tag{4.46}$$

によって $\boldsymbol{F}'$ の点を $\mathbf{CM}$ の点 $x=(x^{a\dot{a}})$ と $\mathbf{CP}^1$ の点 $[\lambda]$ の組 $(x,[\lambda])$ と同一視する．V はこの同型写像を通じて W と $\mathbf{CP}^1$ の直積に正則同型

$$V\simeq W\times\mathbf{CP}^1 \tag{4.47}$$

となる．したがって $\mathbf{CP}^1$ を2個の開集合

$$D_0=\{[\lambda]\in\mathbf{CP}^1\mid\lambda_{\dot{0}}\neq0\},\quad D_1=\{[\lambda]\in\mathbf{CP}^1\mid\lambda_{\dot{1}}\neq0\}$$

で覆えば，対応する開集合

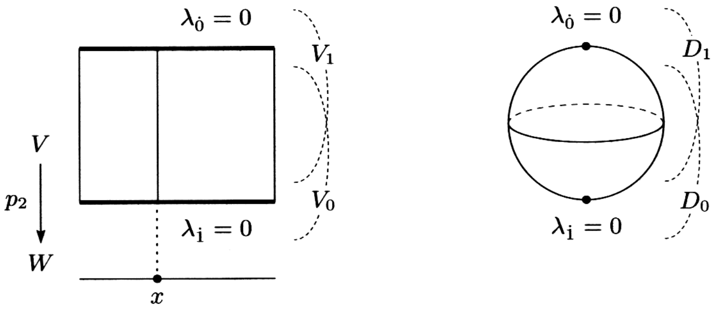


図 4.7　V の開被覆と $p_2^{-1}(x) \simeq \mathbf{CP}^1$ の開被覆

$$V_0 \simeq W \times D_0, \quad V_1 \simeq W \times D_1 \tag{4.48}$$

による V の開被覆 $\{V_0, V_1\}$ が得られる（図 4.7）．

さらに仮定を強めて，W は $\mathbf{CM} \simeq \boldsymbol{C}^4$ の開集合としてシュタイン開集合に正則同型であるとする（シュタイン開集合やルンゲ領域などの多変数複素函数論の概念についてはあとで簡単に解説する）．たとえば

1. 任意の時空点を中心とする多重円盤（第 3 章参照）
2. $\mathbf{CM}_\pm$（$\boldsymbol{C}^4$ の部分集合と見れば凸集合である）

などがその例である（実際にはいずれもルンゲ領域である）．また，D_α も $\boldsymbol{C}$ に正則同型なのでシュタイン開集合である（実際には $\boldsymbol{C}$ の場合にはすべての開集合がシュタインである）．シュタイン開集合の直積もシュタイン開集合になるので，結局 V_α はシュタイン開集合に正則同型である．したがってコホモロジーに関して消滅定理

$$H^q(V_\alpha, \mathcal{O}) = 0 \quad (q > 0) \tag{4.49}$$

が成立する．$\boldsymbol{F}'$ の点を $(x, [\lambda])$ という組と見なせば，$\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ は (x, λ) について正則で λ に関して $-m-2$ 次斉次な函数の層であって，層として V_α 上に制限すれば $\mathcal{O}_{V_\alpha}$ と同型になる（5 節を参照されたい）．したがってこの層についても

$$H^q(V_\alpha, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) = 0 \quad (q > 0) \tag{4.50}$$

が成立し，ルレイの定理によって

$$H^1(V, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) \simeq H^1(\{V_0, V_1\}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) \tag{4.51}$$

という同型が得られる．チェックコホモロジーを商線形空間として具体的に書けば

$$\begin{aligned} &H^1(\{V_0, V_1\}, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) \\ &\simeq \frac{\Gamma(V_0 \cap V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2))}{\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) + \Gamma(V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2))} \end{aligned} \tag{4.52}$$

となる．

$\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ の断面を (x, λ) の正則函数と見なせば，このチェックコホモロジーの要素 $[f(x^{a\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})]$ を具体的に記述することができる．V_0, V_1 は $W \times D_0, W \times D_1$ に対応するので，x を止めて λ の $-m-2$ 次斉次正則函数として扱えば，状況は $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m-2)$ のチェックコホモロジー (4.35) と同じであり，そこに x が W 上の正則パラメータとして入り込んでいる，と考えてよい．結果として

$$H^1(V, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) \simeq \Gamma(W, \mathcal{O}) \otimes S^m(\boldsymbol{C}^2) \tag{4.53}$$

という同型が得られる．この式の右辺は W 上の完全対称な正則スピナー場 $\psi_{\dot{a}_1 \cdots \dot{a}_m}(x)$ のなす空間と見なせる．この同型によってチェックコホモロジー類からスピナー場を取り出すものが前述の周回積分 (4.45) に他ならない．

4.4　多変数複素函数論に関する補足

以上の議論の中で多変数複素函数論の基本的な概念や結果を援用した．改めてそれらを簡単に紹介しておく．詳細については参考文献 [112] を参照されたい．

$\boldsymbol{C}^n$ の領域（すなわち連結な開集合）U を考える．U で定義された有限個の正則函数 $F_1(x), \ldots, F_m(x)$ によって

$$\{x \in U \mid |F_1(x)| < 1, \ldots, |F_m(x)| < 1\}$$

という形に表される部分集合は一般に複数の連結成分をもつ．それらの連結成分のうち有界なものを解析的多面体（analytic polyhedron）という．U が解析的多面体の増大列 $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \cdots$（それぞれが $\overline{\Delta_k} \subset \Delta_{k+1}$ という条件を満たすとする）で内側から近似される（すなわち $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = U$ となる）とき，U は

正則領域（domain of holomorphy）であるという[†9]．各連結成分が正則領域であるような開集合をシュタイン開集合（Stein open set）という．

解析的多面体の定義において $F_1(x), \ldots, F_m(x)$ を多項式に選んだものを多項式的多面体（polynomial polyhedron）という．多項式的多面体の増大列で内側から近似される領域をルンゲ領域（Runge domain）という[†10]．ルンゲ領域の方が正則領域よりも条件としては強いが，具体的な例を構成するときには多項式を用いることが多いので，ルンゲ領域の方が手軽に使える概念であるとも言えるだろう．

正則領域・ルンゲ領域のいずれにおいても $\mathcal{O}$ 係数のコホモロジーの消滅定理が成立する．多項式的多面体 Δ は岡の埋め込み（Oka's embedding）と呼ばれる正則写像

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \to & D_r^n \times D_1^m \\ x & \mapsto & (x, F_1(x), \ldots, F_m(x)) \end{array}$$

（r は十分大きく選んでおく）によって $\boldsymbol{C}^{n+m}$ の多重円盤に埋め込むことができる．このことと第 3 章で紹介した多重円盤上のコホモロジーの消滅定理を組み合わせれば，多項式的多面体に対する $\mathcal{O}$ 係数のコホモロジーが 0 次以外で消えることがわかる．それを領域の近似の議論と組み合わせれば，ルンゲ領域 U 上のコホモロジーの消滅定理

$$H^q(U, \mathcal{O}) = 0 \quad (q > 0) \tag{4.54}$$

が証明できる．正則領域（したがってシュタイン開集合）の場合にはこれよりも込み入った議論が必要だが，結果として同じ形の消滅定理が成立する．

正則領域の共通部分，直積，正則写像による逆像などは再び正則領域になる．ルンゲ領域についても同様のことが言える．解析的多面体・多項式的多面体はそれ自体が正則領域・ルンゲ領域である．1 変数複素函数論で知られるルンゲの定理からの帰結として，$\boldsymbol{C}$ の任意の単連結領域はルンゲ領域である．また $\boldsymbol{C}^n$ の任意の凸領域はルンゲ領域である．もともと正則領域やルンゲ領域は凸性の概念

[†9] 正確に言えば，これは正則領域を特徴づけるいくつかの同値な条件の一つである．

[†10] これもルンゲ領域を特徴づけるいくつかの同値な条件の一つである．本来はその領域上の正則函数が多項式で広義一様に近似できるものを意味する．

の拡張である正則凸性（holomorphic convexity）や多項式的凸性（polynomial convexity）と密接な関連がある．

5　ペンローズ変換のコホモロジー的定式化

この節ではイーストウッドらによるペンローズ変換のコホモロジー的定式化を紹介する．その柱となるのは旗多様体上の正則相対微分形式の層とそれを係数とするコホモロジーである．それによって無質量自由場の方程式自体の大域的な意味も明らかになるが，それを説明するにはこの章で紹介してきたこと以外にもいくつかの道具が必要になる．それらを細部にわたって解説する余裕はないので，以下では技術的に難しい部分は省略し，結果のごく一部を紹介するにとどめる．詳細については原論文 [24] やウォードとウェルズの本 [102] の中の解説[†11]を参照されたい．

5.1　旗多様体上の正則相対微分形式の層

まず正則線形束の引き戻しの概念を説明する．一般に複素多様体の間の正則写像 $h:X\to Y$ と Y 上の正則線形束 L（射影を $\pi:L\to Y$ とする）に対してファイバー積

$$X\underset{Y}{\times}L=\{(x,v)\in X\times L\mid h(x)=\pi(v)\}\tag{4.55}$$

として X 上の正則線形束 h^*L が定義される．L の局所自明化を与える Y の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ならびにそれに伴う変換函数 $g_{\alpha\beta}:V_\alpha\cap V_\beta\to \mathrm{GL}(r,\boldsymbol{C})$ が与えられれば，h^*L は X の開集合 $U_\alpha=h^{-1}(V_\alpha)$ 上の自明束 $U_\alpha\times\boldsymbol{C}^r$ を $g_{\alpha\beta}\circ h:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(r,\boldsymbol{C})$ によって貼り合わせて得られる．

$\mathbf{PT}$ 上の正則線形束 $H^{\otimes(-m-2)}$ を $\boldsymbol{F}$ へ引き戻したもの $p_1^*H^{\otimes(-m-2)}$ を考える．これを係数とする $\boldsymbol{F}$ 上の正則微分形式の層 $\Omega^p_{\boldsymbol{F}}(p_1^*H^{\otimes(-m-2)})$ を $\Omega^p_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ という記号で表す．特に $\Omega^0_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ は4節で触れた $\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ に他ならない．これらを用いて p_1 に関する正則相対微分形式の層を

[†11] 原論文よりもこの解説の方が丁寧でわかりやすい．必要な技術的細目についても基礎から説明してある．

$$\Omega^p_{p_1}(-m-2) = \Omega^p_{\boldsymbol{F}}(-m-2)/(p_1^{-1}\Omega^1_{\mathbf{PT}}(-m-2) \wedge \Omega^{p-1}_{\boldsymbol{F}}) \quad (p>0),$$
$$\Omega^0_{p_1}(-m-2) = \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2) \tag{4.56}$$

と定義する．ここで $\Omega^p_{\mathbf{PT}}(-m-2)$ は $\mathbf{PT}$ 上の正則線形束 $H^{\otimes(-m-2)}$ を係数とする正則微分形式の層を表す．$p_1^* H^{\otimes(-m-2)}$ でひねられていることを別にすれば，これは通常の正則相対微分形式の層と同様のものである．これらを相対外微分演算子 d_{p_1}（$p_1^* H^{\otimes(-m-2)}$ の変換函数はこれに対して定数として振る舞うことに注意されたい）で結ぶことによって正則相対ドラーム複体

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{p_1}(-m-2) \xrightarrow{d_{p_1}} \Omega^1_{p_1}(-m-2) \xrightarrow{d_{p_1}} \Omega^2_{p_1}(-m-2) \longrightarrow 0 \tag{4.57}$$

が得られる．左端の準同型の核は $p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)$ に等しく，それを付け加えた系列

$$0 \longrightarrow p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2) \xrightarrow{\iota} \Omega^0_{p_1}(-m-2) \xrightarrow{d_{p_1}} \Omega^1_{p_1}(-m-2) \xrightarrow{d_{p_1}} \Omega^2_{p_1}(-m-2) \longrightarrow 0 \tag{4.58}$$

は完全系列となる．

$\boldsymbol{F}' \simeq \mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1$ の上でこれらの層と d_{p_1} を具体的に記述してみよう．$\boldsymbol{F}'$ を

$$\boldsymbol{F}'_0 = \{(x,[\lambda]) \mid \lambda_{\dot{0}} \neq 0\}, \quad \boldsymbol{F}'_1 = \{(x,[\lambda]) \mid \lambda_{\dot{1}} \neq 0\}$$

（それぞれ $\boldsymbol{C}^4 \times \boldsymbol{C}$ と正則同型）によって覆う．これに伴って $\mathbf{PT}'$ も

$$\mathbf{PT}'_0 = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \lambda_{\dot{0}} \neq 0\}, \quad \mathbf{PT}'_1 = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \lambda_{\dot{1}} \neq 0\}$$

で覆われる．

i) $\boldsymbol{F}'_0$ 上の記述

$\boldsymbol{F}'_0$ における局所座標として

$$z^a = x^{a\dot{1}}, \quad w^a = i x^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}/\lambda_{\dot{0}}, \quad \zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}} \tag{4.59}$$

を用いる．z^a は p_1 のファイバー方向の座標，(w^a, ζ) は底空間の開集合 $\mathbf{PT}'_0$ 上の座標と見なせる．$\Omega^p_{p_1}(-m-2)$ を $\boldsymbol{F}'_0$ に制限すれば

$$\Omega^0_{p_1}(-m-2)|_{\boldsymbol{F}'_0} \simeq \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}'_0}, \quad \Omega^1_{p_1}(-m-2)|_{\boldsymbol{F}'_0} \simeq \mathcal{O}^{\oplus 2}_{\boldsymbol{F}'_0},$$
$$\Omega^2_{p_1}(-m-2)|_{\boldsymbol{F}'_0} \simeq \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}'_0}$$

が成立する．p_1 のファイバー方向の接ベクターの基底として

$$\partial/\partial z^a = -\lambda_{\dot{0}}^{-1}\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$$

が選べる．d_{p_1} は z^a に関する外微分

$$d_{p_1}f = \frac{\partial f}{\partial z^a}dz^a, \quad d_{p_1}(f_b dz^b) = \frac{\partial f_b}{\partial z^a}dz^a \wedge dz^b$$

であるが，上の関係式によって $\lambda_{\dot{0}}^{-1}\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$ を用いて表すこともできる．

ii) $\boldsymbol{F}'_1$ 上の記述

$\boldsymbol{F}'_1$ における局所座標として

$$y^a = x^{a\dot{0}}, \quad v^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}/\lambda_{\dot{1}}, \quad \eta = \lambda_{\dot{0}}/\lambda_{\dot{1}} \tag{4.60}$$

を用いる．y^a は p_1 のファイバー方向の座標，(v^a, η) は底空間の開集合 $\mathbf{PT}'_1$ 上の座標と見なせる．$\Omega^p_{p_1}(-m-2)$ を $\boldsymbol{F}'_1$ 上に制限すれば $\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}'_1}$ の1個または2個の直和と同型になることは $\boldsymbol{F}'_0$ の場合と同様である．p_1 のファイバー方向の接ベクターの基底として

$$\partial/\partial y^a = \lambda_{\dot{1}}^{-1}\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$$

が選べる．d_{p_1} は y^a に関する外微分

$$d_{p_1}f = \frac{\partial f}{\partial y^a}dy^a, \quad d_{p_1}(f_b dy^b) = \frac{\partial f_b}{\partial y^a}dy^a \wedge dy^b$$

として表せる．

iii) $\boldsymbol{F}'_0$ と $\boldsymbol{F}'_1$ の局所座標の関係

局所座標の間には

$$y^a = -z^a\zeta - iw^a, \quad v^a = w^a\zeta^{-1}, \quad \eta = \zeta^{-1}$$

という関係が成立する．したがって $\boldsymbol{F}'$ の開部分集合 V' に対して $f(z^a, w^a, \zeta) \in \Gamma(\boldsymbol{F}'_0 \cap V', \mathcal{O})$ と $g(y^a, v^a, \eta) \in \Gamma(\boldsymbol{F}'_1 \cap V', \mathcal{O})$ の組[†12]が定義域の共通部分で

[†12] $f(z^a, w^a, \zeta)$, $g(y^a, v^a, \eta)$ は $f(z^0, z^1, w^0, w^1, \zeta)$, $g(y^0, y^1, v^0, v^1, \eta)$ の略記である．以後もこの略記法を用いる．

貼り合わされて $\Omega^0_{p_1}(-m-2)=\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ の V' 上の断面を定めるのは

$$f(z^a,w^a,\zeta)=\zeta^{-m-2}g(y^a,v^a,\eta) \tag{4.61}$$

という等式が成立するときである．また，微分形式の間には

$$dy^a=-\zeta dz^a+(dw^0,\,dw^1,\,d\zeta\text{ の線形結合})$$

という関係が成立する．したがって $f_b(z^a,w^a,\zeta)dz^b\in\Gamma(\boldsymbol{F}'_0\cap V',\Omega^1)$ と $g_b(y^a,v^a,\eta)dy^b\in\Gamma(\boldsymbol{F}'_1\cap V',\Omega^1)$ の組が $\Gamma(V',\Omega^1_{p_1}(-m-2))$ の要素を定めるのは

$$f_b(z^a,w^a,\zeta)=-\zeta^{-m-1}g_b(y^a,v^a,\eta) \tag{4.62}$$

という等式が成立するときである（ζ のべき指数がずれることに注意）．同様にして $f_{bc}(z^a,w^a,\zeta)dz^b\wedge dz^c\in\Gamma(\boldsymbol{F}'_0\cap V',\Omega^2)$ と $g_{bc}(y^a,v^a,\eta)dy^b\wedge dy^c\in\Gamma(\boldsymbol{F}'_1\cap V',\Omega^2)$ の組が $\Gamma(V',\Omega^2_{p_1}(-m-2))$ の要素を定めるのは

$$f_{bc}(z^a,w^a,\zeta)=\zeta^{-m}g_{bc}(y^a,v^a,\eta) \tag{4.63}$$

という等式が成立するときである．

以上の考察から正則相対微分の層に関して次のことがわかる．

補題 4.5　$p=0,1,2$ のいずれの場合も $\Omega^p_{p_1}(-m-2)$ の $\boldsymbol{F}'_0$ および $\boldsymbol{F}'_1$ への制限は $\mathcal{O}$ の有限個の直和に同型である．また

$$\begin{aligned}\Omega^1_{p_1}(-m-2)|_{\boldsymbol{F}'}&\simeq\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-1)^{\oplus 2}|_{\boldsymbol{F}'},\\ \Omega^2_{p_1}(-m-2)|_{\boldsymbol{F}'}&\simeq\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m)|_{\boldsymbol{F}'}\end{aligned} \tag{4.64}$$

が成立する．

5.2　正則相対微分形式の層のコホモロジー

以下では 4 節と同様に時空領域として **CM** の開部分集合 W を考える．4 節では $\boldsymbol{F}$ 上の斉次正則関数の層 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)$ に関するコホモロジーを考えたが，ここではさらに正則相対微分形式の層 $\Omega^p_{p_1}(-m-2)$ のコホモロジーを考える．以下に示す一連の定理によって，W が $\boldsymbol{C}^4$ のシュタイン開集合に正則同型（その意味で正則関数の層に関してコホモロジー的に自明）な場合には，

対応する $\boldsymbol{F}'$ の開部分集合 $V = p_2^{-1}(W)$ の上のコホモロジーを具体的に求めることができる．その結果として，これらのコホモロジーはいずれも W 上のある種の正則スピナー場の空間に他ならないことがわかる．相対外微分演算子 d_{p_1} はそれらの間を結ぶ微分演算子を定めるが，それが無質量自由場の方程式に現れる微分演算子の正体である．

まず最初に次のコホモロジー消滅定理に注意する．

定理 4.7　$\mathbf{CM}$ の開集合 W は $\mathbf{CM} \simeq \boldsymbol{C}^4$ によって $\boldsymbol{C}^4$ のシュタイン開集合と正則同型であるとする．このとき $V = p_2^{-1}(W)$ と $p = 0, 1, 2$ に対して

$$H^q(V, \Omega^p_{p_1}(-m-2)) = 0 \quad (q \neq 1) \tag{4.65}$$

が成立する．

証明　4節と同様に，$V \simeq W \times \mathbf{CP}^1$ を $V_\alpha \simeq W \times D_\alpha$ という開集合 V_0, V_1 で覆う．W がシュタイン開集合と正則同型ならば，V_α もそうなる．これと補題 4.5 の前半の主張から

$$H^q(V_\alpha, \Omega^p_{p_1}(-m-2)) = 0 \quad (q > 0)$$

が従うのでルレイの定理が適用できて，すべての次数で

$$H^q(V, \Omega^p_{p_1}(-m-2)) \simeq H^q(\{V_0, V_1\}, \Omega^p_{p_1}(-m-2))$$

という同型が成立する．特に $q > 1$ におけるコホモロジーの消滅が従う．$q = 0$ については補題 4.5 の後半の主張から

$$\begin{aligned} H^0(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2)) &\simeq \Gamma(V, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)), \\ H^0(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) &\simeq \Gamma(V, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-1)^{\oplus 2}), \\ H^0(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2)) &\simeq \Gamma(V, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m)) \end{aligned}$$

がわかる．右辺の集合の要素を (x, λ) の函数 $f(x, \lambda)$ と見なせば，x を止めることにそれぞれ $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m-2)$, $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m-1)^{\oplus 2}$, $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m)$ の $\mathbf{CP}^1$ 上の断面と見なせる．$m = 2s > 0$ なのでこれらはいずれも消える．こうして $p = 0, 1, 2$ のいずれに対しても $H^0(V, \Omega^p_{p_1}(-m-2)) = 0$ が成立することがわかる．□

消えずに残る 1 次コホモロジーはそれぞれ以下に示すような特定の対称性をもつ正則スピナー場の空間と線形同型である．

定理 4.8　前定理と同じ設定のもとで

$$\begin{aligned} &H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2)) \simeq \Gamma(W, \mathcal{O}) \otimes S^m(\boldsymbol{C}^2), \\ &H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) \simeq \Gamma(W, \mathcal{O}) \otimes S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2) \otimes \boldsymbol{C}^2, \\ &H^1(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2)) \simeq \Gamma(W, \mathcal{O}) \otimes S^{m-2}(\boldsymbol{C}^2) \end{aligned} \tag{4.66}$$

という複素線形空間の同型が得られる．

証明　前定理の証明に用いた V の開被覆 $\{V_0, V_1\}$ によって

$$H^1(V, \Omega^p_{p_1}(-m-2)) \simeq \frac{\Gamma(V_0 \cap V_1, \Omega^p_{p_1}(-m-2))}{\Gamma(V_0, \Omega^p_{p_1}(-m-2)) + \Gamma(V_1, \Omega^p_{p_1}(-m-2))}$$

が成立する．補題 4.5 の後半を用いれば $p = 0, 1, 2$ のそれぞれについて

$$\begin{aligned} H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2)) &\simeq \frac{\Gamma(V_0 \cap V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2))}{\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2)) + \Gamma(V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2))}, \\ H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) &\simeq \frac{\Gamma(V_0 \cap V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-1)^{\oplus 2})}{\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-1)^{\oplus 2}) + \Gamma(V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-1)^{\oplus 2})}, \\ H^1(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2)) &\simeq \frac{\Gamma(V_0 \cap V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m))}{\Gamma(V_0, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m)) + \Gamma(V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m))} \end{aligned}$$

という同型が得られる．右辺の商線形空間の要素を (x, λ) の正則函数 $f(x, \lambda)$ の同値類 $[f(x, \lambda)]$ と考えれば，x を止めるごとに 4 節の結果が適用できて，$[f(x, \lambda)]$ を

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m-2)) &\simeq S^m(\boldsymbol{C}^2), \\ H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m-1)^{\oplus 2}) &\simeq S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2) \otimes \boldsymbol{C}^2, \\ H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{CP}^1}(-m)) &\simeq S^{m-2}(\boldsymbol{C}^2) \end{aligned}$$

に値をもつ W 上の正則函数と考えることができる．ただし 2 番目の同型については $S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2) \oplus S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2) \simeq S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2) \otimes \boldsymbol{C}^2$ という複素線形空間の同型を用いて右辺を書き直した．□

$\Omega^p_{p_1}(-m-2)$ の間は相対外微分演算子 d_{p_1} によって (4.57) のように結ばれ

ている．この層準同型はコホモロジーの準同型（同じ記号 d_{p_1} で表す）を引き起こす．それを具体的に求めると次のような正則スピナー場の空間の間の微分演算子になる．

定理 4.9 $H^1(V, \Omega^p_{p_1}(-m-2))$ を前定理のように表現するとき，d_{p_1} はそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(W,\mathcal{O})\otimes S^m(\boldsymbol{C}^2) & \to & \Gamma(W,\mathcal{O})\otimes S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2)\otimes \boldsymbol{C}^2 \\ \psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m} & \mapsto & \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_m} \end{array} \tag{4.67}$$

および

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(W,\mathcal{O})\otimes S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2)\otimes \boldsymbol{C}^2 & \to & \Gamma(W,\mathcal{O})\otimes S^{m-2}(\boldsymbol{C}^2) \\ \phi^a{}_{\dot{a}_2\cdots\dot{a}_m} & \mapsto & \dfrac{1}{2}\partial_{a\dot{a}}\phi^{a\dot{a}}{}_{\dot{a}_3\cdots\dot{a}_m} \end{array} \tag{4.68}$$

という複素線形写像に対応する．

証明 $d_{p_1} : H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2))$ について考える．(4.66) はコホモロジーを定理 4.8 の証明のように表現しておいて周回積分を行うことにより得られる．(4.66) の第 1 の同型は $f \in \Gamma(V_0 \cap V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-2))$ に対して

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m} = \oint \lambda_{\dot{a}_1}\cdots\lambda_{\dot{a}_m} f \frac{\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i}$$

を対応させるものであり，第 2 の同型は $(g^a) \in \Gamma(V_0 \cap V_1, \mathcal{O}_{\boldsymbol{F}}(-m-1)^{\oplus 2})$ に対して

$$\phi^a{}_{\dot{a}_2\cdots\dot{a}_m} = \oint \lambda_{\dot{a}_2}\cdots\lambda_{\dot{a}_m} g^a \frac{\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i}$$

を対応させるものである．$\boldsymbol{F}'_0$, $\boldsymbol{F}'_1$ 上の局所座標による正則相対微分形式の記述を思い出せば，d_{p_1} は $f \mapsto \lambda_{\dot{a}}\partial^{a\dot{a}}f$ という微分演算子に対応することがわかる．これを $\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m}$ の言葉に翻訳すれば

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m} \mapsto \oint \lambda_{\dot{a}_2}\cdots\lambda_{\dot{a}_m}\lambda_{\dot{a}}\partial^{a\dot{a}} f \frac{\lambda_{\dot{b}}d\lambda^{\dot{b}}}{2\pi i} = \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_m}$$

という微分演算子になる．$d_{p_1} : H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2))$ についての主張も（計算はもう少し込み入ったものになるが）同様にして確か

められる．□

以上に示した結果と同様のことが $\mathbf{CM}^{\#}$ を覆う開集合 U_{jk}（$0 \leq j < k \leq 3$, $U_{23} = \mathbf{CM}$）のそれぞれの上で成立する．それらをつなぎ合わせれば $\mathbf{CM}^{\#}$ のスピナー束構造を考慮に入れた大域的取扱いができるが，ここではその議論には立ち入らない．

注意　大域的な取扱いにおいては高次順像（higher direct image）の概念が鍵となる．一般に連続写像 $h: X \to Y$ と X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して対応

$$V \in \mathfrak{O}_Y \ \mapsto \ H^q(h^{-1}(V), \mathcal{F}) \tag{4.69}$$

と制限写像 $H^q(h^{-1}(V), \mathcal{F}) \to H^q(h^{-1}(W), \mathcal{F})$（$W \subseteq V$）によって前層が定まる．それを層化したものを $R^q h_* \mathcal{F}$ という記号で表して，h による $\mathcal{F}$ の q 次順像（q-th direct image）と呼ぶ．$y \in Y$ におけるその茎は

$$R^q h_* \mathcal{F}_y = \varinjlim H^q(h^{-1}(V), \mathcal{F}) \quad (V \in \mathfrak{O}_Y(y) \text{ の制限に関する帰納的極限}) \tag{4.70}$$

で与えられる．ただし $q = 0$ の場合は局所性条件を満たすので，そのままで層（すなわち順像 $h_* \mathcal{F}$）となる．$\mathbf{CM}^{\#}$ の各点 x では任意の開近傍 W' に対して $\boldsymbol{C}^4$ のシュタイン開集合と正則同型な開近傍 $W \subseteq W'$ が存在するので[†13]，すでに見たことから 1 次以外の高次順像の消滅

$$R^q p_{2*} \Omega^p_{p_1}(-m-2) = 0 \quad (q \neq 1) \tag{4.71}$$

と 1 次順像の茎に関する同型

$$\begin{aligned} R^1 p_{2*} \Omega^0_{p_1}(-m-2)_x &\simeq \mathcal{O}_x \otimes S^m(\boldsymbol{C}^2), \\ R^1 p_{2*} \Omega^1_{p_1}(-m-2)_x &\simeq \mathcal{O}_x \otimes S^{m-1}(\boldsymbol{C}^2) \otimes \boldsymbol{C}^2, \\ R^1 p_{2*} \Omega^2_{p_1}(-m-2)_x &\simeq \mathcal{O}_x \otimes S^{m-2}(\boldsymbol{C}^2) \end{aligned} \tag{4.72}$$

が従う．実際には，より強い結果として，これらの 1 次順像 $R^1 p_{2*} \Omega^p_{p_1}(-m-2)$ と $\mathbf{CM}^{\#}$ 上のスピナー束の断面の層の層としての同型が得られる（イーストウッドらの原論文 [24] やウォードとウェルズの著書 [102] の中の解説を参照されたい）．

[†13] 言い換えれば，そのような開近傍 W の集りが x の開近傍基（basis of open neighborhoods）をなす．

5.3　ペンローズ変換のコホモロジー的定式化

以上の結果に基づいてペンローズ変換をコホモロジーの言葉で定式化することができる．イーストウッドらの原論文 [24] では高次順像に関するルレイのスペクトル系列（spectral sequence）などを用いているが，ここではそのような大道具を使うことは避けて，長完全系列の図式追跡による素朴な方法を用いることにする．

定理 4.10　$\mathbf{CM}$ の開集合 W は $\mathbf{CM} \simeq \boldsymbol{C}^4$ によって $\boldsymbol{C}^4$ のシュタイン開集合に正則同型であるとする．このとき

$$\begin{aligned} &H^1(V, p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)) \\ &\simeq \operatorname{Ker} d_{p_1} : H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) \end{aligned} \tag{4.73}$$

が成立する．

証明　$Z^1_{p_1}(-m-2)$ を

$$Z^1_{p_1}(-m-2) = \operatorname{Ker} d_{p_1} : \Omega^1_{p_1}(-m-2) \to \Omega^2_{p_1}(-m-2)$$

と定義すれば，完全系列 (4.58) を

$$0 \to Z^1_{p_1}(-m-2) \to \Omega^1_{p_1}(-m-2) \to \Omega^2_{p_1}(-m-2) \to 0$$

ならびに

$$0 \to p_1^{-1}\mathcal{O}(-m-2) \to \Omega^0_{p_1}(-m-2) \to Z^1_{p_1}(-m-2) \to 0$$

の二つの短完全系列に分けることができる．ただしここでは記号を簡単にするため $\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)$ を $\mathcal{O}(-m-2)$ と略記している．それぞれに付随する長完全系列を考える．

1. 第 1 の短完全系列に付随する長完全系列

$$\begin{aligned} &0 \to \Gamma(V, Z^1_{p_1}(-m-2)) \to \Gamma(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) \\ &\to \Gamma(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, Z^1_{p_1}(-m-2)) \\ &\to H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2)) \\ &\to \cdots \end{aligned}$$

とすでに見た $\Gamma(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2))$, $\Gamma(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2))$ の消滅を組み合わせれば,

$$\Gamma(V, Z^1_{p_1}(-m-2)) = 0$$

が成り立つこと，ならびに

$$0 \to H^1(V, Z^1_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2))$$
$$\to H^1(V, \Omega^2_{p_1}(-m-2))$$

が完全系列であることがわかる．

2. 第 2 の短完全系列に付随する長完全系列

$$0 \to \Gamma(V, p_1^{-1}\mathcal{O}(-m-2)) \to \Gamma(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2))$$
$$\to \Gamma(V, Z^1_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, p_1^{-1}\mathcal{O}(-m-2))$$
$$\to H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2)) \to H^1(V, Z^1_{p_1}(-m-2))$$
$$\to \cdots$$

と上で示した $\Gamma(V, Z^1_{p_1}(-m-2))$ の消滅から

$$0 \to H^1(V, p_1^{-1}\mathcal{O}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2))$$
$$\to H^1(V, Z^1_{p_1}(-m-2))$$

が完全系列であることがわかる．

こうして得られた二つの完全系列を組み合わせれば

$$0 \to H^1(V, p_1^{-1}\mathcal{O}(-m-2)) \to H^1(V, \Omega^0_{p_1}(-m-2))$$
$$\xrightarrow{d_{p_1}} H^1(V, \Omega^1_{p_1}(-m-2))$$

が完全系列であることがわかる．これから定理の主張が従う．□

定理 4.9 から d_{p_1} の核は無質量自由場の方程式の W 上の正則函数解の空間

$$Z_m(W) = \{(\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m}) \in \Gamma(W, \mathcal{O}) \otimes S^m(\boldsymbol{C}^2) \mid \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_m} = 0\} \tag{4.74}$$

に同型であることがわかる．したがって

系 4.1 上の定理の仮定のもとで

$$H^1(V, p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)) \simeq Z_m(W) \tag{4.75}$$

が成立する.

この同型をさらに **PT** 上の層のコホモロジーの言葉に翻訳する. そのためには $U = p_1(V)$ と V の間に

$$H^1(U, \mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)) \overset{?}{\simeq} H^1(V, p_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)) \tag{4.76}$$

が成立するかどうかが問題になる. これが成立する場合に得られる同型

$$H^1(U, \mathcal{O}_{\mathbf{PT}}(-m-2)) \simeq Z_m(W) \tag{4.77}$$

がペンローズ変換 (Penrose transformation) である. 上の同型 (4.76) が成立するかどうかは $p_1 : V \to U$ の位相幾何学的性質に関わる問題である. イーストウッドらの原論文 [24] はこの写像のファイバーのドラームコホモロジーの言葉で上の同型が成立する十分条件を与えている. それによれば, たとえば $p_1 : V \to U$ の各ファイバーが凸集合であればこの条件が満たされて, 上の同型が成立する. 特に W 自体が凸集合の場合にはこの条件が満たされる (ちなみに, W のシュタイン性も従うことに注意されたい).

例 $W \subseteq \mathbf{CM}$ が任意の時空点を中心とする多重円盤あるいは $\mathbf{CM}_{\pm}$ であれば同型 (4.76) が成立し, ペンローズ変換のコホモロジー的定式化 (4.77) が得られる.

覚え書き

1. 層係数コホモロジーに関しても小林の複素幾何学の教科書 [115] の第 1 巻が簡潔でわかりやすい. また, 金子の超函数論の教科書 [112] は層係数コホモロジーを基礎からていねいに解説しているのみならず, 正則函数のコホモロジー的性質に関しても詳しい. シュタイン開集合やルンゲ領域に関する多変数複素函数論の基本的結果はこの本で一通り学ぶことができる. この章ではもっぱらチェックコホモロジーを用いてきたが, 層係数コホモロジーには本文中に触れたゴドマン分解などに基づく定式化もある. 層の分解に基づく層係数コホモロジーの

本格的な解説書としてはイバーセンの著書 [46] を推薦したい．この本では，ホモロジー代数と圏論に基づく詳細な一般論に加えて，解析学や幾何学に由来する例や応用が豊富に紹介されている．

2. この章では正ヘリシティの自由場の方程式のみ考えてきたが，負ヘリシティの自由場の方程式やスカラー場の方程式についてもコホモロジー的な取扱いができる．負ヘリシティの場合にはある種のポテンシャルを経由して解を記述する．詳しくはイーストウッドらの原論文 [24] を参照されたい．これはゲージ場の取扱いに通じる面がある．負ヘリシティの自由場とゲージ場の類似性についてはハゲットとトッドの著書 [42] も参照されたい．

3. 第 2 章の最後の部分で触れたように，無質量自由場の周回積分表示をリーマン球面上の面積分に書き直すことによってドルボーコホモロジーとの関係が見えてくる．ドルボーコホモロジーによるペンローズ変換の定式化はウッドハウス [107] とウェルズ [103] の論文に始まる．ウェルズが強調しているように，ドルボーコホモロジーによる定式化の利点の一つは $\mathrm{SU}(2,2)$ の作用に関する共変性が明瞭であることにある．その意味では表現論的一般化に適していると言えるだろう．

4. ペンローズ変換はさまざまな方向に一般化されている．表現論の立場からの一般化についてはバストンとイーストウッドの著書 [8] や論文集 [6] に収録されたイーストウッドらの解説を参照されたい．その後の進展として関口の研究 [80, 81] などもある．積分幾何学や多変数複素函数論の立場からの一般化については論文集 [6, 19, 41] に収録されているギンディキンの解説や論文を参照されたい．

5. 無質量自由場の方程式の複素管状領域 $\mathbf{CM}_{\pm}$ における正則函数解が与えられば，その実時空 $\boldsymbol{M}$ への境界値として無質量自由場の方程式の超函数解が得られる．超函数解に対するペンローズ変換に関してはウェルズらの研究 [7, 104] がある（ウォードとウェルズの著書 [102] にその解説がある）．

第5章 ゲージ場のツイスター理論

ツイスター理論の非線形場への一般化として，この章ではゲージ場に対するツイスター理論を紹介する．電磁場はリー群 $U(1)$ に伴うゲージ場であり，そのゲージ共変な場の方程式としてマクスウェル方程式がある．マクスウェル方程式を $U(1)$ 以外のリー群 G に一般化したのがヤン–ミルズ方程式である．G が非アーベル的な場合のヤン–ミルズ方程式はマクスウェル方程式と違って非線形な場の方程式であるため，取扱いが難しくなる．マクスウェル方程式の場合には場の自由度をゲージ場の曲率の自己双対部分と反自己双対部分に分けて，それぞれに対する場の方程式（すなわちスピナー形式の無質量自由場）をツイスター理論で扱うことができた．このようなことは非線形性をもつヤン–ミルズ方程式には期待できない．ところがウォードはヤン–ミルズ方程式の場合にも，曲率の自己双対部分と反自己双対部分の一方が恒等的に消えるようなゲージ場に限ればツイスター的記述が可能になる，ということを見出した [95]．この条件は元来ゲージ場の経路積分量子化においてインスタントン解と呼ばれる解を特徴づけるものとして知られていた．アティヤとウォードはこのツイスター記述によってインスタントン解の取扱いをツイスター空間上の代数幾何学の問題に翻訳した [5]．

ゲージ場の曲率の自己双対部分が消える，という条件を一種の場の方程式と見なして反自己双対方程式と呼ぶ．同様の意味で，反自己双対部分が消えるという条件は自己双対方程式と呼ばれるが，自己双対方程式と反自己双対方程式は時空鏡映で互いに入れ替わるので，以後はおもに反自己双対方程式を考える．ビアンキの恒等式によってこれらの方程式からヤン–ミルズ方程式が自動的に従うので，これらの方程式の解はヤン–ミルズ方程式の解の一部をなす（その中にインスタントン解が含まれている）．アティヤとウォードが前述の研究において示したことを要約すれば，反自己双対方程式の解にはツイスター空間上のある特別な性質をもつ正則線形束が対応する，ということになる．この基本的結果に基づいて，まもなくユークリッド時空上のインスタントン解の完全かつ具体的な記述が与えられた [2]．

アティヤとウォードの幾何学的な視点とは対照的に，ベラビンとザハロフは反自己双対方程式を可積分系（特にソリトン方程式）の類似物として扱うことを提案した [9]. 可積分系としての特徴は反自己双対方程式を複素時空で定式化し直すことによって明確になる．実際には，ウォードの最初の論文 [95] が示すように，反自己双対方程式のツイスター的記述を複素時空で与えることもできる．ツイスター的な見方と可積分系的な見方は互いに相補うものであり，同じものを別の言葉で表現していると言ってもよい．

1　ユークリッド時空上のヤン–ミルズ方程式

この節ではヤン–ミルズ方程式に関する基本的概念を紹介する．出発点となるのはゲージ場の理論の作用汎函数である．ヤン–ミルズ方程式はこの作用汎函数の変分に関するオイラー–ラグランジュ方程式として導かれる．ユークリッド時空で定式化されたヤン–ミルズ方程式にはインスタントン解と呼ばれる大域的な解のクラスが考えられる．これらの解はある位相幾何学的条件のもとで作用汎函数の極小値を与えるようなゲージ場の配位であり，曲率に関して自己双対条件あるいは反自己双対条件を満たす．これらの概念の場の理論的背景については参考文献 [113] を，また微分幾何学的背景については参考文献 [116, 119, 121] を参照されたい．

1.1　作用汎函数と場の方程式

以下では4次元ユークリッド時空 $\boldsymbol{E}$ において議論を進めるが，場の方程式や作用汎函数の定式化などはミンコフスキー時空 $\boldsymbol{M}$ でもそのまま通用する．ユークリッド時空で考える理由については最後に簡単に触れる．

ヤン–ミルズ方程式（Yang-Mills equation）はマクスウェル方程式の一般化であり，ゲージ場（gauge field）あるいはゲージポテンシャル（gauge potential）と呼ばれる場 A_μ（$\mu = 1, 2, 3, 4$）によって定式化される．A_μ は与えられたコンパクトなリー群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ に値をもつ場であり，数学的には $\boldsymbol{E}$ 上のある G 主束（principal G-bundle）[†1] P の接続（connection）D の接続係数

[†1] P が射影 $\pi : P \to M$ によって M 上のファイバー束の構造をもち，各ファイバーが G に微分同相であり，それによって決まる G の各ファイバー $\pi^{-1}(x) \simeq G$ への左作用が P 全体で滑らかにつながるとき，P は M 上の G 主束であるという．

(connection coefficients) と解釈される．これから P に付随する任意の線形束の接続（同じ記号 D で表す）も決まる．$G = U(1)$ の場合がマクスウェル方程式に相当する．話を簡単にするため，以後は G として $U(N)$ の部分リー群のみを考えることにする．さらに，$\boldsymbol{E}$ 上で考える場合には特に断らない限り P は直積束 $\boldsymbol{E} \times G$ であるとする（非自明な G 主束は $\boldsymbol{E}$ の共形コンパクト化 S^4 を扱うときまで考えなくてよい）．

接続 D の ∂_μ 方向の成分 D_μ は

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \tag{5.1}$$

という 1 階微分演算子と見なせる．そこから曲率 (curvature) の成分

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{5.2}$$

が定義される．これは $\mathfrak{g}$ 値 2 次微分形式

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA + A \wedge A$$

にまとめられる．ただし A は $A = A_\mu dx^\mu$ という $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式を表す．$G = U(1)$ の場合には，行列の交換子 $[A_\mu, A_\nu]$ が消えて $F_{\mu\nu}$ は電磁場を表す 4 次元テンサー場に帰着する[†2]．

G 値函数 $h = h(x)$ によるゲージ場の変換

$$A_\mu \ \to \ A_\mu^h = h A_\mu h^{-1} - \partial_\mu h \cdot h^{-1} \tag{5.3}$$

をゲージ変換 (gauge transformations) という．接続を前述のように 1 階微分演算子と見なせば，ゲージ変換は演算子の合成

$$D_\mu^h = \partial_\mu + A_\mu^h = h \circ D_\mu \circ h^{-1} \tag{5.4}$$

として表せる．これに対応して曲率は

$$F_{\mu\nu} \ \to \ F_{\mu\nu}^h = h F_{\mu\nu} h^{-1}$$

[†2] 正確に言えば，$U(1)$ のリー代数は純虚数の集合 $i\boldsymbol{R}$ であるから，A_μ は純虚数値の場となる．それを $-iA_\mu$ と書き直して A_μ を実数値の場として定義し直したものが第 1 章で紹介した意味での電磁場の 4 次元ポテンシャルである．ディラック方程式に電磁場を導入する際に虚数単位を入れて $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$ という置換えを行ったのはこのためである．

というように変換する．ゲージ変換された場は物理的にはもとの場と同値なものと解釈されるので，物理法則はゲージ変換によって不変な形に書かれなければならない．電磁場やそれと結合したスカラー場・スピナー場の理論は $G=U(1)$ に関してこの性質（ゲージ対称性）をもつ．ヤン（C.N. Yang）とミルズ（R.L. Mills）は非アーベル群に対するこれらの理論の類似として SU(2) ゲージ対称性をもつ場の理論を提案した．内山（R. Utiyama）が指摘したように，それはただちに SU(2) 以外のリー群にも一般化できる．このようにして得られるゲージ場の理論を総称してヤン–ミルズ理論（Yang-Mills theory）という．

ヤン–ミルズ方程式はヤン–ミルズ理論の作用汎函数（action functional）の変分に関するオイラー–ラグランジュ方程式（Euler-Lagrange equation）として導かれる．作用汎函数を書き下すには $\mathfrak{g}$ 上の正定値不変内積が必要だが，G が $U(N)$ の部分群であれば $\mathfrak{g}$ の要素は歪エルミート行列であり，したがって $\mathfrak{g}$ 上の正定値不変内積として

$$\langle X, Y\rangle = -\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(XY^*) \tag{5.5}$$

を選ぶことができる．それを用いてラグランジアン（Lagrangian）を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\sum_{\mu<\nu}\operatorname{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{5.6}$$

と定義し[†3]，作用汎函数

$$S = \int_{\boldsymbol{E}} \mathcal{L}d^4x, \quad d^4x = dx^1dx^2dx^3dx^4 \tag{5.7}$$

を導入する．これが収束するためには $F_{\mu\nu}$ が無限遠方で十分速く 0 に近づく必要がある．ゲージ変換のもとで $F_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu} \to hF_{\mu\nu}h^{-1}$ と変換するので，$\mathcal{L}$（したがって S）は不変である．A_μ を $\mathfrak{g}$ の適当な基底 E_k（$k=1,\ldots,\dim\mathfrak{g}$）によって $A_\mu = A_\mu^k E_k$ と展開してオイラー–ラグランジュ方程式

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu^k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu^k} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu,\nu}^k} = 0 \quad (A_{\mu,\nu}^k = \partial_\nu A_\mu^k) \tag{5.8}$$

[†3] これはユークリッド時空の場合に限らず通用する定義である．ユークリッド時空の場合には，計量を標準的な形 $g=\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ に選べば添字の上げ下げは $F^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}$ というように見掛けだけのものになる．

を書き下せば，最終的には $\mathfrak{g}$（とその基底の選び方）によらず共通の形の方程式

$$[D^\mu, F_{\mu\nu}] = \partial^\mu F_{\mu\nu} + [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \tag{5.9}$$

が得られる．これがヤン–ミルズ方程式である．

ヤン–ミルズ理論は場の理論であるから，最終的には正準量子化（canonical quantization）や経路積分量子化（path integral quantization）などの方法によって量子化されなければならない．経路積分による量子化では，作用汎函数が極小値をとるような場の配位を基点として選び，そこからのずれを実際の積分変数として扱う．その意味で作用汎函数の極値問題（すなわち変分問題）が重要になる．よく知られているように，オイラー–ラグランジュ方程式はそのような場の配位の「候補」すなわち作用汎函数の停留点を定める方程式である．したがって，ヤン–ミルズ方程式の大域的解が一つ得られたとしても，経路積分量子化の観点から見ればそれだけでは次の二重の意味で不十分である．第一に，それに対して作用汎函数の値が有限であるとは限らない．第二に，それが作用汎函数の極小点を与えるとは限らない.「インスタントン解」とはこれらの条件を満足する解のことを言う．ただし，正確に言えばインスタントン解はユークリッド時空上で定式化されたヤン–ミルズ方程式の解である．

ミンコフスキー時空の代わりにユークリッド時空でヤン–ミルズ方程式を考える動機を物理の観点から簡単に説明しておこう．素粒子論の模型としてはヤン–ミルズ理論も他の場の理論の模型と同様にミンコフスキー時空で定式化されるべきであるが，じつはいろいろな理由で経路積分量子化はユークリッド時空で行う方が都合がよい（これはこのあとで述べる数学的観点とも関連している）．そこで，まずユークリッド時空で定式化して計算を進め，その結果をウィック回転によってミンコフスキー時空へ戻す，という手順を踏むのである．実際には，ウィック回転を実行せずに，ユークリッド時空上の計算だけで済ませることも多い．

数学的観点から見れば，ヤン–ミルズ方程式は他の相対論的場の方程式と同様にミンコフスキー時空では双曲型，ユークリッド時空では楕円型になる．ヤン–ミルズ方程式のように非線形性をもつ双曲型微分方程式は数学的な取扱いが容易ではない．他方，楕円型の非線形微分方程式は幾何学で広範に登場する対

象であり，それを取扱う技法も整備されている．この意味でユークリッド時空（より一般には正定値計量をもつリーマン多様体）の方がヤン–ミルズ方程式を考察する舞台として都合がよい．

1.2 自己双対・反自己双対な微分形式

以下では4次元ユークリッド時空における自己双対・反自己双対な微分形式の基本的性質をまとめておく．

標準形の計量 $ds^2 = \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ に対して定まる $*$ 演算子は2次微分形式に対して

$$*(dx^\mu \wedge dx^\nu) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}dx_\alpha \wedge dx_\beta \tag{5.10}$$

と作用する．ここで $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ は $\epsilon^{1234} = 1$ という条件で決まる完全反対称テンサーを表す．具体的には

$$*(dx^1 \wedge dx^2) = dx^3 \wedge dx^4,$$
$$*(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^2 \wedge dx^4,$$
$$*(dx^1 \wedge dx^4) = dx^2 \wedge dx^3$$

であり，残りの $dx^\mu \wedge dx^\nu$ への作用は

$$*^2 = 1 \tag{5.11}$$

という等式（ミンコフスキー時空の場合とは符号が逆であることに注意されたい）から読みとれる．

$*$ 演算子は各時空点 $x \in \boldsymbol{E}$ における2次微分形式のなす線形空間 $\Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{E})$ に対してそれ自身への線形写像として作用する．$*^2 = 1$ であるから $\Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{E})$ は固有値 ± 1 の固有空間

$$\Lambda_\pm^2(T_x^*\boldsymbol{E}) = \{\omega \in \Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{E}) \mid *\omega = \pm\omega\} \tag{5.12}$$

に直和分解する：

$$\Lambda^2(T_x^*\boldsymbol{E}) = \Lambda_+^2(T_x^*\boldsymbol{E}) \oplus \Lambda_-^2(T_x^*\boldsymbol{E}) \tag{5.13}$$

各点 x において $\Lambda_+^2(T_x^*\boldsymbol{E})$ に属する2次微分形式は自己双対，$\Lambda_-^2(T_x^*\boldsymbol{E})$ に属

する 2 次微分形式は反自己双対であるという．

$\Lambda^2_\pm(T^*_x\boldsymbol{E})$ は $dx^1\wedge dx^2 \pm dx^3\wedge dx^4$, $dx^1\wedge dx^3 \mp dx^2\wedge dx^4$, $dx^1\wedge dx^4 \pm dx^2\wedge dx^3$ によって張られる 3 次元線形部分空間をなす．また複素座標

$$x^{0\dot{0}} = y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + ix^4), \qquad x^{0\dot{1}} = -\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x^1 + ix^2),$$
$$x^{1\dot{0}} = z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \qquad x^{1\dot{1}} = \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - ix^4)$$

から決まる 2 次微分形式

$$S^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}}, \quad S^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}} \tag{5.14}$$

を $\Lambda^2_+(T^*_x\boldsymbol{E})$ および $\Lambda^2_-(T^*_x\boldsymbol{E})$ のそれぞれの基底に選ぶこともできる．

次の補題は作用汎函数 S の極値問題を考える際の鍵となる．

補題 5.1　歪エルミート $N\times N$ 行列を係数とする任意の 2 次微分形式 ω_1, ω_2 に対して以下のことが成立する．

1. $\mathrm{Tr}(\omega_1 \wedge *\omega_2) = \mathrm{Tr}(\omega_2 \wedge *\omega_1)$.
2. $\mathrm{Tr}(\omega_1 \wedge *\omega_1) = 0 \Longleftrightarrow \omega_1 = 0$.
3. $*\omega_1 = \omega_1,\ *\omega_2 = -\omega_2 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(\omega_1 \wedge *\omega_2) = 0$.

証明　ω_1, ω_2 を

$$\omega_1 = \omega_{1,\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \omega_2 = \omega_{2,\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と表せば

$$\mathrm{Tr}(\omega_1 \wedge *\omega_2) = -2\sum_{\mu<\nu}\mathrm{Tr}(\omega_{1,\mu\nu}\omega_{2,\mu\nu})dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

という等式が成立する．第 1・第 2 の主張はこれと歪エルミート行列の間の内積 $\langle X, Y\rangle = -\mathrm{Tr}(XY)$ の性質から従う．また $*\omega_1 = \omega_1$, $*\omega_2 = -\omega_2$ であれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\omega_1 \wedge *\omega_2) &= -\mathrm{Tr}(*\omega_1 \wedge \omega_2)\\ &= -\mathrm{Tr}(\omega_2 \wedge *\omega_1)\\ &= -\mathrm{Tr}(\omega_1 \wedge *\omega_2)\end{aligned}$$

となるので（最後の変形は第 1 の主張に基づく），第 3 の主張も従うことがわかる．□

1.3 作用汎函数の満たす不等式とインスタントン解

作用汎函数は4次微分形式の積分として

$$S = -\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F \wedge *F) \tag{5.15}$$

と表すこともできる．補題5.1を用いてこの積分を書き直してみよう．$F_\pm$ を

$$F_+ = \frac{1}{2}(F + *F), \quad F_- = \frac{1}{2}(F - *F)$$

と定義すれば，F_+ は自己双対，F_- は反自己双対形式であり，F と $*F$ はこれらの和あるいは差として

$$F = F_+ + F_-, \quad *F = F_+ - F_-$$

と表せる．これを上の作用汎函数の表示式に代入して展開すれば，補題5.1によって $\mathrm{Tr}(F_\pm \wedge *F_\mp)$ の形の項は消えて，残った $\mathrm{Tr}(F_\pm \wedge F_\pm)$ を改めて $\pm\,\mathrm{Tr}(F_\pm \wedge *F_\pm)$ と書き直せば

$$S = -\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_+ \wedge *F_+) - \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_- \wedge *F_-) \tag{5.16}$$

という表示を得る．

同様の書き換えはインスタントン数（instanton number）と呼ばれる積分

$$p_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F \wedge F) \tag{5.17}$$

についても可能であり，結果として

$$p_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_+ \wedge *F_+) + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_- \wedge *F_-) \tag{5.18}$$

という表示式が得られる．ここでは詳しい説明を省くが（参考文献 [1, 116, 121] を参照されたい），p_1 は F が遠方で十分速く0に近づくとき収束して整数値となる．特に，p_1 の値はそのようなゲージ場の連続的変形によって不変に保たれる．p_1 は $\boldsymbol{E}$ の共形コンパクト化 $S^4 = \boldsymbol{E} \cup \{\infty\}$ 上に決まるある G 主束 P の位相的不変量（topological invariant）である．

こうして得られた S と p_1 の表示を見比べれば，S は正定値だが p_1 は不定値であることがわかる．他方，これらの線形結合 $S \pm 2\pi^2 p_1$ は $F_\pm$ のみを含み，

$$S \pm 2\pi^2 p_1 = -\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_\pm \wedge *F_\pm) \geq 0 \tag{5.19}$$

という不等式を満たす．この種の不等式はヤン–ミルズ理論の場合に限らず場の理論のさまざまな模型について知られていて，位相幾何学的に非自明な場の配位を論じる際に基本的な役割を演じる．今の場合は，この不等式から次のことがわかる．

定理 5.1 F が遠方で十分速く 0 に近づいて S, p_1 が有限値になるとする．このとき以下のことが成立する．

1. $p_1 > 0 \Longrightarrow S \geq 2\pi^2 p_1$. 等号は $F_- = 0$ の場合に成立する．
2. $p_1 < 0 \Longrightarrow S \geq -2\pi^2 p_1$. 等号は $F_+ = 0$ の場合に成立する．
3. $p_1 = 0 \Longrightarrow S \geq 0$. 等号は $F = 0$ の場合に成立する．

証明 $p_1 > 0$ とする．上の不等式の $S - 2\pi^2 p_1$ の方から

$$S = 2\pi^2 p_1 - \int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_- \wedge *F_-) \geq 2\pi^2 p_1$$

が従う．等号が成立するのは

$$-\int_{\boldsymbol{E}} \mathrm{Tr}(F_- \wedge *F_-) = 0$$

となる場合だが，$-\mathrm{Tr}(F_- \wedge *F_-)$ の正値性からこれが満たされるのは $\mathrm{Tr}(F_- \wedge *F_-) = 0$ の場合のみであり，さらに補題 5.1 を思い出せばこれは $F_- = 0$ と同値である．$p_1 < 0$ や $p_1 = 0$ の場合の主張も同様にして確かめられる．□

こうして，p_1 が一定値（0 でないとする）に保たれるようなゲージ場の配位の集合の上で S の極値問題を考えれば，その極小値を与える配位は p_1 の正負に応じて

1. （$p_1 > 0$ のとき）自己双対条件 $*F = F$ を満たす
2. （$p_1 < 0$ のとき）反自己双対条件 $*F = -F$ を満たす

ということがわかった．あとで説明するように，これらはいずれもヤン–ミルズ方程式の解を与える．これらをインスタントン数が p_1 のインスタントン解 (instanton solution) という．$p_1 < 0$ の場合のインスタントン解をインスタントン数が $-p_1$ の反インスタントン解 (anti-instanton solution) と呼んで

$p_1 > 0$ の場合と区別することもある．

注意 p_1 の位相的不変量としての意味についてもう補足しておく．一般に $F = 0$ すなわち接続が平坦（flat）であれば，フロベニウスの定理[†4]によって各点の近傍で $dh + Ah = 0$ という方程式が G 値の解 $h = h(x)$ をもつので，A は局所的に

$$A = -dh \cdot h^{-1}$$

という形に表せる．同様の意味で，F が遠方 $|x| \to \infty$ で十分速く 0 に近づく場合には，適当な球面の外側 $|x| > R$ において G 値の函数 $h = h(x)$ を選べば漸近的表示

$$A \sim -dh \cdot h^{-1} \quad (|x| \to \infty) \tag{5.20}$$

が成立する．言い換えれば，A を h^{-1} でゲージ変換したものは

$$h^{-1}Ah + h^{-1}dh \to 0 \quad (|x| \to \infty) \tag{5.21}$$

と振る舞う．そこで，$S^4 = \boldsymbol{E} \cup \{\infty\}$ を $\boldsymbol{E}$ と無限遠点 ∞ の近傍 U_∞（$|x| > R$）で覆って，h を変換函数として $\boldsymbol{E}$ 上の直積束 $\boldsymbol{E} \times G$ と U_∞ 上の直積束 $U_\infty \times G$ を貼り合わせることによって，S^4 上の（一般には非自明な）G 主束 P が決まる．インスタントン数 p_1 はこの G 主束の第 1 ポントリャーギン数（1st Pontryagin number）と呼ばれる位相的不変量である．$\boldsymbol{E} \times G$ 上の接続 $D = d + A$ は U_∞ 上の接続係数を

$$A_\infty = \begin{cases} h^{-1}Ah + h^{-1}dh & (x \in U_\infty \setminus \{\infty\}) \\ 0 & (x = \infty) \end{cases} \tag{5.22}$$

と定めることによって P 全体に延長される．こうして曲率が遠方で十分速く 0 に近づくような $\boldsymbol{E}$ 上のゲージ場は S^4 上のゲージ場と見なせるのである．

1.4 自己双対・反自己双対条件とヤン–ミルズ方程式

ゲージ場の曲率についてはビアンキ恒等式（Bianchi identity）と呼ばれる恒等式が成立する．4 次元時空の場合のビアンキ恒等式は次に示すような特別な形をとる．

補題 5.2 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{5.23}$$

[†4] フロベニウスの定理の設定には一般的なものとリー群値の微分方程式や線形微分方程式に特化したものがある（たとえば参考文献 [117, 120] を参照されたい）．ここでは後者を適用する．

と定義するとき，ゲージ場の任意の配位に対してビアンキ恒等式

$$[D^\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}] = \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} + [A^\mu, \tilde{F}_{\mu\nu}] = 0 \tag{5.24}$$

が成立する．

証明　D_μ はヤコビ恒等式

$$[D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] = 0$$

を満たす[†5]．λ, μ, ν を $1, 2, 3, 4$ の中の互いに異なる値（4 通りの組合せがある）に選んでこの恒等式を書き直せば，上に示した形に帰着することが容易に確かめられる．□

$\tilde{F}_{\mu\nu}$ が $*F$ の成分であること

$$*F = \frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

に注意すれば，ビアンキ恒等式とヤン–ミルズ方程式を見比べることによってただちに次のことがわかる．

定理 5.2　自己双対条件・反自己双対条件 $*F = \pm F$ からヤン–ミルズ方程式が従う．特に，インスタントン解はヤン–ミルズ方程式の解である．

注意　定理の前半ではゲージ場が $\boldsymbol{E}$ 全体で定義されている必要はない．すなわち前半の主張は時空の各点の近傍で成立する．したがって，自己双対・反自己双対条件

$$*F = \pm F \tag{5.25}$$

をゲージ場に対する微分方程式と見なせば，その解はヤン–ミルズ方程式の解の一部をなすことになる．このようにゲージ場に対する微分方程式と見なした自己双対・反自己双対条件をそれぞれ自己双対方程式（self-duality equation）ならびに反自己双対方程式（anti-self-duality equation）という．重力場などについても同様の方程式が知られているので，それと区別する意味でこれらを自己双対ヤン–ミルズ方程式（self-dual Yang-Mills equation）や反自己双対ヤン–ミルズ方程式（anti-self-dual Yang-Mills equation）と呼ぶことも多い．ちなみに，空間鏡映によって自己双対方程式と反自己双対方程式は入れ替わるので，どちらを考えても実質的な違いはない．以後はおもに反自己双対方程式を扱う．

[†5] これは一般次元の場合にも成立するが，それが本来の意味でのビアンキ恒等式である．

2 反自己双対方程式と複素構造

この節ではアティヤとウォードの論文 [5] に従ってユークリッド時空上の反自己双対方程式の解をツイスター空間の正則線形束の言葉に翻訳する．その鍵となるのは諸々の複素構造である．最初に，ユークリッド時空とツイスター空間の関係を複素構造の言葉で説明する．次に，与えられた反自己双対方程式の解に対してツイスター空間上のある複素線形束に複素構造が定まることを示す．これによってこの複素線形束は正則線形束となる．最後に，この正則線形束が特別な条件を満たすものであることを注意する．

2.1 ツイスター空間と複素構造

ユークリッド時空とツイスター空間の関係について簡単に復習しよう．第2章で説明したように，ツイスター空間 $\mathbf{PT}$ の開集合 $\mathbf{PT}' = \{[\xi] \in \mathbf{PT} \mid \xi = (\mu, \lambda),\ \lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}}) \neq (0,0)\}$ の点 $[\xi]$ に対して α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ と $\boldsymbol{E}$ の交点 x を対応させることによって写像 $p : \mathbf{PT}' \to \boldsymbol{E}$ が定義される．具体的には $x = p([\xi])$ は 2×2 行列形式で

$$\begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^0 & -\overline{\mu^1} \\ \mu^1 & \overline{\mu^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\dot{0}} & -\overline{\lambda_{\dot{1}}} \\ \lambda_{\dot{1}} & \overline{\lambda_{\dot{0}}} \end{pmatrix}^{-1} \tag{5.26}$$

と書ける（最後の行列は $\lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}}) \neq (0,0)$ であることによって可逆性を保証されている）．

p の各ファイバー $p^{-1}(x)$ はツイスター直線 $\varGamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ に他ならないので，$\mathbf{PT}'$ は $\boldsymbol{E}$ 上の $\mathbf{CP}^1$ 束と見なせるが，これは実際には自明束である．直積束 $\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ とのファイバー束としての同型は

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PT}' & \mapsto & \boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1 \\ [\xi] & \mapsto & (p([\xi]), [\lambda]) \end{array} \tag{5.27}$$

という写像によって与えられる．この写像の可逆性は $\mu = (\mu^0, \mu^1)$ が x と λ から

$$\begin{pmatrix} \mu^0 & -\overline{\mu^1} \\ \mu^1 & \overline{\mu^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -\bar{z} \\ z & \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\dot{0}} & -\overline{\lambda_{\dot{1}}} \\ \lambda_{\dot{1}} & \overline{\lambda_{\dot{0}}} \end{pmatrix}$$

というように復元されることによってわかる．

この微分同相写像 $\mathbf{PT}' \simeq \boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ によって，複素多様体である $\mathbf{PT}'$ から実多様体 $\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ の上に複素多様体の構造を導入することができる．この複素構造が反自己双対方程式をツイスターの言葉に翻訳する際の鍵の一つとなる．座標を用いてこの $\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ の複素構造を具体的に記述してみよう．

$\mathbf{PT}'$ は2個の開集合 $U_0 = \{[\xi] \in \mathbf{PT}' \mid \lambda_{\dot{0}} \neq 0\}, U_1 = \{[\xi] \in \mathbf{PT}' \mid \lambda_{\dot{1}} \neq 0\}$ によって覆われる．対応して $\boldsymbol{E}\times\mathbf{CP}^1$ も $\boldsymbol{E}\times D_0$（$D_0 = \{[\lambda] \in \mathbf{CP}^1 \mid \lambda_{\dot{0}} \neq 0\}$）と $\boldsymbol{E} \times D_1$（$D_1 = \{[\lambda] \in \mathbf{CP}^1 \mid \lambda_{\dot{1}} \neq 0\}$）で覆われる．$U_0$ 上には複素多様体としての正則局所座標

$$w^0 = \mu^0/\lambda_{\dot{0}}, \quad w^1 = \mu^1/\lambda_{\dot{0}}, \quad \zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$$

があるが，これは $\boldsymbol{E} \times D_0$ 上の局所座標 (x^μ, ζ) と

$$w^0 = y - \zeta\bar{z}, \quad w^1 = z + \zeta\bar{y} \tag{5.28}$$

という関係で結ばれている．同様の意味で U_1 上の正則局所座標

$$v^0 = \mu^0/\lambda_{\dot{1}}, \quad v^1 = \mu^1/\lambda_{\dot{1}}, \quad \eta = \lambda_{\dot{0}}/\lambda_{\dot{1}}$$

は $\boldsymbol{E} \times D_1$ 上の局所座標 (x^μ, η) と

$$v^0 = \eta y - \bar{z}, \quad v^1 = \eta z + \bar{y} \tag{5.29}$$

という関係で結ばれている．

この複素構造に付随するコーシー–リーマン方程式は反自己双対方程式をツイスターの言葉に翻訳する際に重要な役割を演じるので，具体的な形を示しておこう．$U_0 \simeq \boldsymbol{E} \times D_0$ の上で考えれば，正則局所座標 w^0, w^1, ζ を $y, z, \bar{y}, \bar{z}, \zeta$ で表す前述の関係式とその複素共役

$$\bar{w}^0 = \overline{w^1} = \bar{z} + \bar{\zeta}y, \quad \bar{w}^1 = -\overline{w^0} = -\bar{y} + \bar{\zeta}z$$

から $\partial_y, \partial_z, \partial_{\bar{y}}, \partial_{\bar{z}}$ と $\partial_{w^0}, \partial_{w^1}, \partial_{\bar{w}^0}, \partial_{\bar{w}^1}$ の間の線形関係式

$$\partial_y = \partial_{w^0} + \bar{\zeta}\partial_{\bar{w}^0}, \quad \partial_z = \partial_{w^1} + \bar{\zeta}\partial_{\bar{w}^1},$$
$$\partial_{\bar{y}} = -\partial_{\bar{w}^1} + \zeta\partial_{w^1}, \quad \partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{w}^0} - \zeta\partial_{w^0}$$

が従う．これを逆に解けば w^0, w^1 に関する $\bar{\partial}$ 演算子の表示

$$\partial_{\bar{w}^0} = (1+\zeta\bar{\zeta})^{-1}(\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y), \quad \partial_{\bar{w}^1} = -(1+\zeta\bar{\zeta})^{-1}(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z) \quad (5.30)$$

が得られる．これを ζ に関する $\bar{\partial}$ 演算子 $\partial_{\bar{\zeta}} = \partial/\partial\bar{\zeta}$ と組み合わせれば，$\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ 上の正則函数を特徴づけるコーシー–リーマン方程式

$$\partial_{\bar{w}^0} f = 0, \quad \partial_{\bar{w}^1} f = 0, \quad \partial_{\bar{\zeta}} f = 0$$

は $y, z, \bar{y}, \bar{z}, \zeta$ によって

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)f = 0, \quad (\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)f = 0, \quad \partial_{\bar{\zeta}} f = 0 \quad (5.31)$$

と書けることになる．同様にして $U_1 \simeq \boldsymbol{E} \times D_1$ の上ではコーシー–リーマン方程式は

$$(\eta\partial_{\bar{y}} - \partial_z)f = 0, \quad (\eta\partial_{\bar{z}} + \partial_y)f = 0, \quad \partial_{\bar{\eta}} f = 0 \quad (5.32)$$

と表せることがわかる．両者は $\boldsymbol{E} \times (D_0 \cap D_1)$ 上で $\eta = \zeta^{-1}$ という関係によって互いに移り合う．このように一方から他方へ簡単に乗り移れるので，以後はおもに前者を用いて議論を進めることにする．

注意　以上の考察を複素構造の変形の観点から見直すこともできる．$[\lambda] \in \mathbf{CP}^1$ を指定するごとに $\boldsymbol{E}$ には w^0, w^1 あるいは v^0, v^1 を正則座標とする複素構造が入る．言い換えれば $\boldsymbol{E}$ には $\mathbf{CP}^1$ を変形パラメータの空間とする複素構造の変形族が定まるが，その全体空間が $\mathbf{PT}'$ に他ならない（$p : \mathbf{PT}' \to \mathbf{CP}^1$ のファイバー $\pi^{-1}([\lambda])$ は複素多様体としての $\boldsymbol{E}$ と同一視できる）．平坦でない4次元時空に対してツイスター空間を構成する際にも同様の考え方が基礎になる [4].

2.2　複素座標で書いた反自己双対方程式

ミンコフスキー時空上のマクスウェル方程式の自己双対・反自己双対部分は複素数を係数とする座標変換によってワイル方程式と共通する形に書き直すことができた．それに基づいてツイスター的記述ができたわけである．同様のことが今の場合にも当てはまる．ここでは反自己双対方程式 $*F = -F$ を $\boldsymbol{E}$ 上の複素座標 $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ によって書き直す．

まず $A = A_\mu dx^\mu$ に対して $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ に関する成分 A_y, A_z, $A_{\bar{y}}$, $A_{\bar{z}}$ を

$$A = A_y dy + A_z dz + A_{\bar{y}} d\bar{y} + A_{\bar{z}} d\bar{z} \quad (5.33)$$

という等式が成立するように定める．具体的には

$$A_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_3 - iA_4), \quad A_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - iA_2),$$
$$A_{\bar{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_3 + iA_4), \quad A_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + iA_2)$$

となる．対応して接続の $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ に関する成分を

$$D_y = \partial_y + A_y, \ \ldots \tag{5.34}$$

と定義する．

同様にして，これらの複素座標に関する曲率の成分を

$$F_{yz} = [D_y, D_z] = \partial_y A_z - \partial_z A_y + [A_y, A_z], \ \ldots \tag{5.35}$$

と定義する．F 自体は

$$F = F_{yz} dy \wedge dz + F_{\bar{y}\bar{z}} d\bar{y} \wedge d\bar{z} + F_{y\bar{y}} dy \wedge d\bar{y}$$
$$+ F_{y\bar{z}} dy \wedge d\bar{z} + F_{\bar{y}z} d\bar{y} \wedge dz + F_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

と表せるが，これを

$$F = F_{yz} dy \wedge dz + F_{\bar{y}\bar{z}} d\bar{y} \wedge d\bar{z} + \frac{1}{2}(F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}})(dy \wedge d\bar{y} + dz \wedge d\bar{z})$$
$$+ F_{y\bar{z}} dy \wedge d\bar{z} + F_{\bar{y}z} d\bar{y} \wedge dz + \frac{1}{2}(F_{y\bar{y}} - F_{z\bar{z}})(dy \wedge d\bar{y} - dz \wedge d\bar{z})$$

と書き直す．次の補題を適用すれば，右辺の最初の 3 項が自己双対，残りの 3 項が反自己双対であることがわかる．

補題 5.3　$dy \wedge dz, d\bar{y} \wedge d\bar{z}, dy \wedge d\bar{y} + dz \wedge d\bar{z}$ は自己双対である．また，$dy \wedge d\bar{z}$, $d\bar{y} \wedge dz$, $dy \wedge d\bar{y} - dz \wedge d\bar{z}$ は反自己双対である．

注意　これらの 2 次微分形式と $S^{\dot{a}\dot{b}}$, S^{ab} の間には

$$S^{\dot{0}\dot{0}} = dy \wedge dz, \quad S^{\dot{1}\dot{1}} = d\bar{y} \wedge d\bar{z}, \quad S^{\dot{0}\dot{1}} = S^{\dot{1}\dot{0}} = \frac{1}{2}(dy \wedge d\bar{y} + dz \wedge d\bar{z}), \tag{5.36}$$
$$S^{00} = -dy \wedge d\bar{z}, \ S^{11} = -d\bar{y} \wedge dz, \ S^{01} = S^{10} = \frac{1}{2}(dy \wedge d\bar{y} - dz \wedge d\bar{z}) \tag{5.37}$$

という線形関係がある．

証明 各微分形式をもとの実座標 x^μ で書き直せば容易に確かめられる．□

こうして反自己双対方程式 $*F=-F$ が

$$F_{yz}=0, \quad F_{\bar{y}\bar{z}}=0, \quad F_{y\bar{y}}+F_{z\bar{z}}=0 \tag{5.38}$$

と同値であることがわかる．同様に，自己双対方程式 $*F=F$ は

$$F_{y\bar{z}}=0, \quad F_{\bar{y}z}=0, \quad F_{y\bar{y}}-F_{z\bar{z}}=0 \tag{5.39}$$

と同値になる．以後はこの複素表示に基づいて議論を進める．

2.3 ツイスター空間上の正則線形束

以下では反自己双対方程式の C^∞ 級の解を考察の対象とする．$\mathbf{CP}^1$ の非斉次座標 ζ を複素パラメータと見なせば

$$[D_{\bar{y}}-\zeta D_z,\, D_{\bar{z}}+\zeta D_y]=F_{\bar{y}\bar{z}}-(F_{y\bar{y}}+F_{z\bar{z}})\zeta+F_{yz}\zeta^2$$

という等式が成立するので，複素座標で書いた反自己双対方程式は

$$[D_{\bar{y}}-\zeta D_z,\, D_{\bar{z}}+\zeta D_y]=0 \tag{5.40}$$

という方程式（ζ の任意の値に対して成立するものと解釈する）にまとめられる．この方程式は N 成分ベクター値の未知函数 $\psi={}^{\mathrm{t}}(\psi_1\ \cdots\ \psi_N)$ に対する線形微分方程式系

$$(D_{\bar{y}}-\zeta D_z)\psi=0, \quad (D_{\bar{z}}+\zeta D_y)\psi=0, \quad \partial_{\bar{\zeta}}\psi=0 \tag{5.41}$$

の可積分性（integrability）すなわち $\boldsymbol{E}\times\mathbf{CP}^1$ の各点の近傍において N 個の線形独立な解をもつことを保証する条件である．これはフロベニウスの意味の可積分性とは異なるもので[†6]，幾何学的には以下のように概複素構造（almost complex structure）の可積分性として理解される[†7]．

接続 D は直積束 $\mathcal{E}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{C}^N$ の上で定義されているが，(5.41) は ζ をパ

[†6]概念的には，フロベニウスの意味の可積分性とここで問題にする可積分性の違いは，ポアンカレの補題とドルボーの補題の違いに相当する．

[†7]概複素構造の可積分性についても，フロベニウスの定理の場合と同様に一般的な設定と複素線形束に特化したものとがある．ここでは後者を用いる．概複素構造の概念とその可積分条件については参考文献 [115, 119, 120] などを参照されたい．

ラメータとして含むので $\mathcal{E}$ の $\mathbf{PT}' \simeq \boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ への引き戻し

$$\tilde{\mathcal{E}} = p^* \mathcal{E}$$

（これも直積束であるが）の断面に対する線形微分方程式と考えなければならない．この方程式は $\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ 上のコーシー–リーマン方程式 (5.31) に $N \times N$ 行列項を追加して $\tilde{\mathcal{E}}$ 上に持ち上げた形をしている．ここでは具体的な説明を省くが（原論文 [5] を参照されたい），(5.41) は $\tilde{\mathcal{E}}$ 上のある概複素構造によって決まる $\bar{\partial}$ 方程式（断面に対するコーシー–リーマン方程式）であり，(5.40) はこの概複素構造の可積分条件である．この可積分条件が満たされるとき (5.41) は前述の意味で可積分であり，その解を $\tilde{\mathcal{E}}$ の正則断面と見なすことによって複素線形束 $\tilde{\mathcal{E}}$ に $\mathbf{PT}'$ の複素構造と整合的な複素多様体の構造（すなわち正則線形束の構造）が定まるのである．

以上のことを変換函数の言葉で定式化することもできる．(5.41) が可積分であれば，$\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ の各点の近傍で N 個の線形独立な解 $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(N)}$ 言い換えれば $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値の解 $\Psi = (\psi^{(1)} \ \cdots \ \psi^{(N)})$ が存在する．したがって，$\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ を適当な開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で覆えば，各 V_α の上で (5.41) の $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値の解 Ψ_α が存在する．これらの解 $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を用いて (5.41) の任意の解 ψ を「ひねった」もの

$$v_\alpha = \Psi_\alpha^{-1} \psi$$

を考える．これらの函数の組 $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は $\tilde{\mathcal{E}}$ と C^∞ 同型な複素線形束 E の断面と見なせる．$V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ のとき v_α 同士は $v_\alpha = \Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta v_\beta$ という関係で結ばれるので，E は

$$g_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta \tag{5.42}$$

を変換函数として V_α 上の直積束 $V_\alpha \times \boldsymbol{C}^N$ を

$$(x, v_\alpha) \sim (x, v_\beta) \iff v_\alpha = g_{\alpha\beta} v_\beta$$

という同値関係で貼り合わせて得られる複素線形束

$$E = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \times \boldsymbol{C}^N \Big/ \sim \tag{5.43}$$

である．次の補題によって E が $\mathbf{PT}' \simeq \boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ 上の正則線形束であることがわかる．

補題 5.4 $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ ならば，$g_{\alpha\beta}$ に対して

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)g_{\alpha\beta} = 0, \quad (\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)g_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_{\bar{\zeta}}g_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.44}$$

が成立する．特に，$\mathbf{PT}' \simeq \boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ によって V_α に対応する $\mathbf{PT}'$ の開集合を U_α という記号で表せば，$g_{\alpha\beta}$ は $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値正則函数と見なせる．

証明 Ψ_α と Ψ_β が同じ線形微分方程式系 (5.41) を満たすことからただちに確かめられる．□

このように，$\tilde{\mathcal{E}}$ の局所自明化を C^∞ 同型類の中で取り替えることによって，正則な変換函数をもつ複素線形束 E に乗り換えることができる．ちなみに，上の補題と同様にして前述の v_α がコーシー–リーマン方程式を満たすこと

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)v_\alpha = 0, \quad (\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)v_\alpha = 0, \quad \partial_{\bar{\zeta}}v_\alpha = 0 \tag{5.45}$$

すなわち v_α が U_α 上の正則函数であることもわかる．もとの ψ は各 V_α 上でこれらを用いて

$$\psi = \Psi_\alpha v_\alpha \tag{5.46}$$

と表せるが，微分方程式論の言葉遣いを借りれば，これは一般解を基本解系と任意定数で表すことに他ならない（Ψ_α が「基本解系」に，v_α が「任意定数」に相当する）．今の場合 v_α は本当の定数ではなくてツイスター空間（の開集合）上の正則函数であるが，一般に反自己双対方程式に関する考察ではツイスター空間上の正則函数がさまざまな場面で任意定数の役割を果たす．

2.4 正則線形束のもつ性質

定理 5.3 前述のようにして得られる $\mathbf{PT}'$ 上の正則線形束 E は以下の性質をもつ．

1. $p : \mathbf{PT}' \to \boldsymbol{E}$ の各ファイバー $p^{-1}(x)$ への E の制限 $E|_{p^{-1}(x)}$ は $p^{-1}(x)$ 上の正則自明束である．

2. E からその双対束 E^* への反正則な束写像 $\tau : E \to E^*$ が存在して，底空間への射影 $\varpi : E \to \mathbf{PT}'$, $\varpi^* : E^* \to \mathbf{PT}'$ と

$$\sigma(\mu^0, \mu^1, \lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}}) = (-\overline{\mu^1}, \overline{\mu^0}, -\overline{\lambda_{\dot{1}}}, \overline{\lambda_{\dot{0}}})$$

によって定義される反正則写像 $\sigma : \mathbf{PT}' \to \mathbf{PT}'$ に対して $\varpi^* \circ \tau = \sigma \circ \varpi$ が成立する．すなわち

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau} & E \\ \varpi \downarrow & & \varpi^* \downarrow \\ \mathbf{PT}' & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{PT}' \end{array}$$

は写像の可換図式をなす．

証明は原論文 [5] やその解説 [1] に譲る．第 1 の性質は E から反自己双対方程式の解を復元する際の鍵となる．第 2 の性質はゲージ場の歪エルミート性 $A_\mu^* = -A_\mu$ を反映する性質である．

$E|_{p^{-1}(x)}$ の正則自明性（holomorphic triviality）は変換函数を用いて以下のように具体的に説明することもできる．正則同型 $\mathbf{PT}' \simeq \boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ によって $p^{-1}(x)$ は $\mathbf{CP}^1$ と同一視できる．$x \in \boldsymbol{E}$ を固定して $\zeta \in \mathbf{CP}^1$ を変数と見なせば，$\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(x, \zeta)$ はコーシー–リーマン方程式 $\partial_{\bar{\zeta}} \Psi_\alpha = 0$ を満たすので，ζ の $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値正則函数である．$E|_{p^{-1}(x)}$ は $g_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha^{-1} \Psi_\beta$ を $p^{-1}(x)$ に制限したものを変換函数とする複素線形束である．Ψ_α^{-1} によって局所自明化を変えれば変換函数を $g_{\alpha\beta} = 1$ に変えることができるが，Ψ_α は ζ に関して正則だから，これは $E|_{p^{-1}(x)}$ が正則自明束であることを意味する．ちなみに，A が消えずに残る限り Ψ_α は (x, ζ) の函数として正則ではないから，E 自体は $\mathbf{PT}'$ 上の正則自明束ではない．

こうして $\boldsymbol{E}$ 上の反自己双対方程式の解から $\mathbf{PT}'$ 上の特別な性質をもつ正則線形束が定まる．F が遠方で十分速く 0 に近づくような解（言い換えれば S^4 上の反自己双対方程式の解）の場合にはこの正則線形束は $\mathbf{PT}$ 上の正則線形束に延びる（原論文 [5] は，むしろその場合を中心にして扱っている）．逆に，このような正則線形束から反自己双対方程式の解を再構成することもできるが，これも原論文 [5] やその解説 [1] に譲る．再構成の問題は少し異なる設

定（ウォード変換）において改めて議論する．

注意 この節で紹介したことはユークリッド時空に限らず一般に共形的反自己双対4次元リーマン多様体（第6章を参照されたい）においても成立する．すなわち，そのような多様体 $\mathcal{M}$ 上の反自己双対ゲージ場には $\mathcal{M}$ のツイスター空間 $\mathcal{Z}$ 上の正則線形束が対応して，上に示したものと同様の特別な性質をもつ [4].

3 インスタントン解のADHM構成法

この節ではアティヤ，ヒッチン，ドリンフェルド，マニンによって見出されてADHM構成法（ADHM construction）と呼ばれるようになったインスタントン解の構成法 [2] を紹介する．これは射影空間上の正則線形束の分類・構成に関する代数幾何学の結果を用いて見出されたものであるが，ここでは代数幾何学的議論には立ち入らず，時空上のゲージ場の構成を中心に据えて解説する．また，説明を簡単にするため $G = U(N)$ の場合のみを扱う．

3.1 解のデータ

ADHM構成法では線形代数的なデータに基づいてインスタントン解を構成する．$G = U(N)$ の場合のデータは次の各条件を満たす行列 $\Delta^{\dot{a}}(x)$ ($\dot{a} = \dot{0}, \dot{1}$) である．$k$ は最終的にはインスタントン数と同定される．なお，以下で構成するのは実際には $p_1 = -k$ の反インスタントン解である．

1. $\Delta^{\dot{a}}(x)$ は $(2k+N) \times k$ 行列であり，時空座標 $x = (x^{a\dot{a}})$ について1次式である．すなわち，ある複素定数行列 $M_a, N^{\dot{a}}$ によって

$$\Delta^{\dot{a}}(x) = M_a x^{a\dot{a}} + N^{\dot{a}} \tag{5.47}$$

と表される．

2. $\Delta^{\dot{a}}(x)$ を横に並べてできる $(2k+N) \times 2k$ 行列 $\Delta(x) = (\Delta^{\dot{0}}(x)\ \Delta^{\dot{1}}(x))$ とそのエルミート共役 $\Delta(x)^*$ の積は

$$\Delta(x)^* \Delta(x) = \sigma_0 \otimes D(x) = \begin{pmatrix} D(x) & 0 \\ 0 & D(x) \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

という形の $2k \times 2k$ 行列であるとする．ここで σ_0 は 2×2 単位行列を

表す[†8]．$D(x)$ はこの等式によって決まる $k \times k$ 行列である．

3. 時空の各点 $x \in \boldsymbol{E}$ において

$$\mathrm{rank}\, \Delta(x) = 2k \tag{5.49}$$

が成立するとする．また M_0, M_1 を横に並べてできる $(2k+N) \times 2k$ 行列 $M = (M_0\ M_1)$ について

$$\mathrm{rank}\, M = 2k \tag{5.50}$$

が成立するとする．

注意　$\Delta(x)$ は

$$\Delta(x) = M \cdot (x \otimes 1) + N \tag{5.51}$$

と表せる．ここで N は $N^{\dot{a}}$ を並べてできる $(2k+N) \times 2k$ 行列 $N = (N^{\dot{0}}\ N^{\dot{1}})$ であり，また $x \otimes 1$ は

$$x \otimes I = \begin{pmatrix} y1 & -\bar{z}1 \\ z1 & \bar{y}1 \end{pmatrix}$$

というテンサー積を表す．(5.50) は (5.49) の $x = \infty$ における対応物と見なせる．

補題 5.5　$\Delta(x)$ に対する条件 (5.48) は $M_a, N^{\dot{a}}$ に対する次の代数的関係式と同値である：

$$M_0^* M_1 = 0, \tag{5.52a}$$

$$M_0^* M_0 - M_1 M_1^* = 0, \tag{5.52b}$$

$$M_0^* N^{\dot{1}} + N^{\dot{0}*} M_1 = 0, \tag{5.52c}$$

$$M_0^* N^{\dot{0}*} - N^{\dot{1}*} M_1 = 0, \tag{5.52d}$$

$$N^{\dot{0}*} N^{\dot{1}} = 0, \tag{5.52e}$$

$$N^{\dot{0}*} N^{\dot{0}} - N^{\dot{1}*} N^{\dot{1}} = 0. \tag{5.52f}$$

[†8] パウリ行列の記法を流用したが，これは時空座標の行列 $x = (x^{a\dot{a}})$ やこのあと議論する $M_a, N^{\dot{a}}$ の標準形における四元数的構造と無関係ではない．

証明 (5.48) は $\Delta^{\dot{0}}(x)^*\Delta^{\dot{1}}(x) = 0$ および $\Delta^{\dot{0}}(x)^*\Delta^{\dot{0}}(x)^* = \Delta^{\dot{1}}(x)^*\Delta^{\dot{1}}(x)$ の二つの条件式に帰着する．これらの条件式を展開して $M_a, N^{\dot{a}}$ の言葉に翻訳する．$\Delta^{\dot{0}}(x)^*\Delta^{\dot{1}}(x) = 0$ の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}\Delta^{\dot{0}}(x)^*\Delta^{\dot{1}}(x) = {} & M_0^* M_1 \bar{y}^2 + (-M_0^* M_0 + M_1^* M_1)\bar{y}\bar{z} - M_1^* M_0 \bar{z}^2 \\ & + (M_0^* N^{\dot{1}} + N^{\dot{0}*} M_1)\bar{y} + (M_1^* N^{\dot{1}} - N^{\dot{0}*} M_0)\bar{z} + N^{\dot{0}*} N^{\dot{1}}\end{aligned}$$

となる．これが x について恒等的に 0 になるのは $\bar{y}^2, \bar{y}\bar{z}, \bar{z}^2, \bar{y}, \bar{z}$ の各係数と定数項が消える場合である．これから補題の (5.52a), ..., (5.52e) が得られる．$\Delta^{\dot{0}}(x)^*\Delta^{\dot{0}}(x) = \Delta^{\dot{1}}(x)^*\Delta^{\dot{1}}(x)$ の両辺を同様に展開して調べると，定数項以外の関係は (5.52a), ..., (5.52e) の 5 個の条件のもとで満たされていて，定数項から最後の (5.52f) が得られる．□

3.2 解のデータの対称性と標準形

上に述べた解のデータは共形コンパクト化された時空 S^4 （言い換えれば四元数射影直線 $\mathbf{HP}^1$）の無限遠点側と原点側を対等に扱う目的に適している．このことはツイスター空間上の対応する正則線形束の記述を見ればはっきりする．他方，S^4 の有限部分 $\boldsymbol{E}$ に限れば，もう少し無駄を省いたデータの選び方も可能である．反インスタントン解の構成に進む前にそのようなデータの選び方について触れておこう．

$M_a, N^{\dot{a}}$ の満たすべき条件のうち (5.52a), (5.52b), (5.52c) は $M_a, N^{\dot{a}}$ を $g \in U(2k+N)$, $h \in \mathrm{GL}(k, \boldsymbol{C})$ によって

$$M_a \ \to \ gM_ah^{-1}, \quad N^{\dot{a}} \ \to \ gN^{\dot{a}}h^{-1} \tag{5.53}$$

と変えても保たれる，ということに注意しよう．詳細は省くが，この変換の自由度を用いて M_a を

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.54}$$

(1 は $k \times k$ 単位行列，0 は $k \times k$ あるいは $N \times k$ の零行列を表す）という形

にすることができる．M_a がこのように「正規化」されているとき，$N^{\dot{0}}$ を

$$N^{\dot{0}} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ C_0 \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

（B_0, B_1 は $k \times k$ 行列，C_0 は $N \times k$ 行列）と表せば $N^{\dot{1}}$ は (5.52c) と (5.52d) によって

$$N^{\dot{1}} = \begin{pmatrix} -B_1^* \\ B_0^* \\ C_1 \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

（C_1 は $N \times k$ 行列）という形になる．最後に残った (5.52e) と (5.52f) は

$$[B_0, B_1] + C_1^* C_0 = 0, \tag{5.57a}$$

$$[B_0, B_0^*] + [B_1, B_1^*] + C_1 C_1^* - C_0^* C_0 = 0 \tag{5.57b}$$

という代数的関係式に帰着する．なお，この「標準形」においても $h \in U(k)$ による変換

$$B_j \ \to \ hB_j h^{-1}, \quad C_j \ \to \ C_j h^{-1} \tag{5.58}$$

の自由度が残っている．

$M_a, N^{\dot{a}}$ を上のような標準形に選ぶとき $\Delta(x)$ は

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} B_0 + y1 & -B_1^* - \bar{z}1 \\ B_1 + z1 & B_0^* + \bar{y}1 \\ C_0 & C_1 \end{pmatrix} \tag{5.59}$$

という行列になる．上側の $2k \times 2k$ 部分がいわば「ブロック化された四元数」というべき構造をもつことに注意されたい．

3.3　解の構成

前述の条件を満たす行列 $\Delta(x) = (\Delta^{\dot{0}}(x)\ \Delta^{\dot{1}}(x))$ から反自己双対方程式の解を構成する手順を説明する．

$\boldsymbol{C}^{2k+N}$ の要素を $v = (v_1\ \cdots\ v_{2k+N})$ と表す．$\Delta(x)$ が階数 k の行列なの

で，$\boldsymbol{E}$ の各点 x に対して

$$\mathcal{E}_x = \{v \in \boldsymbol{C}^{2k+N} \mid v\Delta(x) = 0\} \tag{5.60}$$

は $\boldsymbol{C}^{2k+N}$ の N 次元複素線形部分空間となる．$\boldsymbol{E}$ の各点に対してこの複素線形空間を乗せたもの

$$\mathcal{E} = \bigcup_{x \in \boldsymbol{E}} \mathcal{E}_x \tag{5.61}$$

は $\boldsymbol{E}$ 上の階数 N の複素線形束となる．さらに無限遠点 $x = \infty$ に対して

$$\mathcal{E}_\infty = \{v \in \boldsymbol{C}^{2k+N} \mid vM = 0\} \tag{5.62}$$

と定めることによって，これは $S^4 = \boldsymbol{E} \cup \{\infty\}$ 上の複素線形束（混乱のおそれがない限り同じ記号 $\mathcal{E}$ で表すことにする）に延長される．

この複素線形束 $\mathcal{E}$ は直積束 $S^4 \times \boldsymbol{C}^{2k+N}$ の部分束であり，直積束上の自明な（すなわち接続係数が0の）接続から $\mathcal{E}$ 上の接続 D が決まる．D の接続係数を具体的に与えるために，$\mathcal{E}_x$ の正規直交基底 $v^{(1)}(x), \ldots, v^{(N)}(x)$ を x に滑らかに依存するように選び，それを並べた行列

$$V(x) = \begin{pmatrix} v^{(1)}(x) \\ \vdots \\ v^{(N)}(x) \end{pmatrix} \tag{5.63}$$

を考える．言い換えれば $V(x)$ は

$$V(x)\Delta(x) = 0, \quad V(x)V(x)^* = 1 \tag{5.64}$$

という条件を満たす $N \times (2k+N)$ 行列である．それは一意的ではなく，左から $U(N)$ 値函数 $h(x)$ を乗じる変換 $V(x) \to h(x)V(x)$ だけの任意性がある．D の接続係数 A はこの行列 $V(x)$ を用いて

$$A = V(x)dV(x)^* = -dV(x)V(x)^* \tag{5.65}$$

と書ける．二つの表示が一致することは $V(x)V(x)^* = 1$ からの帰結である．$V(x) \to h(x)V(x)$ という変換は A のゲージ変換を引き起こす．

こうして得られる A を $G = U(N)$ に関するゲージ場と見なしたものが反イ

ンスタントン解であり，S^4 上のインスタントン数 k の反インスタントン解はすべてこのようにして得られる，というのがアティヤらの論文 [2] の結論である．A が反自己双対方程式を満たすことはあとで示すような直接的な計算で確かめられる．同様の方法で直交群やシンプレクティック群などの場合にも反インスタントン解が構成できる（アティヤの解説 [1] を参照されたい）．他方，すべての反インスタントン解がこのようにして得られる，という主張は射影空間上の正則線形束の分類・構成に関する代数幾何学的考察から導かれる．

ここではこの大がかりな代数幾何学的議論に立ち入る余裕はないが（アティヤらの原論文 [2] やその解説 [1] を参照されたい），反インスタントン解に対応するツイスター空間上の正則線形束自体はやはり $M_a, N^{\dot{a}}$ を用いて具体的に記述できる，ということを指摘しておこう．$\xi = (\mu^a, \lambda_{\dot{a}}) \in \boldsymbol{T} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に依存して決まる複素線形写像 $\phi_\xi : \boldsymbol{C}^k \to \boldsymbol{C}^{2k+N}$ と $\psi_\xi : \boldsymbol{C}^{2k+N} \to \boldsymbol{C}^k$ を

$$\phi_\xi(w) = w(-M_0^* \mu^1 + M_1^* \mu^0 - N^{\dot{0}*} \lambda_{\dot{1}} + N^{\dot{1}*} \lambda_{\dot{0}}), \tag{5.66}$$

$$\psi_\xi(v) = v(M_0 \mu^0 + M_1 \mu^1 + N^{\dot{0}} \lambda_{\dot{0}} + N^{\dot{1}} \lambda_{\dot{1}}) \tag{5.67}$$

と定義する．$M_a, N^{\dot{a}}$ の満たす代数的関係式 (5.52a), ..., (5.52f) によって

$$\psi_\xi \circ \phi_\xi = 0 \tag{5.68}$$

という等式が成立するので，$\operatorname{Im} \phi_\xi$ は $\operatorname{Ker} \psi_\xi$ の線形部分空間である．$\Delta^{\dot{a}}(x)$ に関する仮定からこれらはそれぞれ $k+N$ 次元および k 次元であることがわかる．その商線形空間

$$E_{[\xi]} = \operatorname{Ker} \psi_\xi / \operatorname{Im} \phi_\xi \tag{5.69}$$

は N 次元となる．$\operatorname{Ker} \psi_\xi, \operatorname{Im} \phi_\xi$ が ξ のスカラー倍 $\xi \to c\xi$ によって不変なので，この商線形空間は $[\xi] \in \mathbf{PT}$ によって決まる．$[\xi]$ に関する依存性は明らかに正則なので，$\mathbf{PT}$ の各点にこの複素線形空間を乗せることによって階数 N の正則線形束 E が得られる．詳細はたとえばアティヤの解説 [1] に譲るが，ツイスターと時空座標を結ぶ関係式 $\mu^a = x^{a\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}$ のもとで $\Delta^{\dot{a}}(x)$ が線形写像 ψ_ξ の表現行列 $M_a \mu^a + N^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}}$ と

$$\Delta^{\dot{a}}(x) \lambda_{\dot{a}} = M_a \mu^a + N^{\dot{a}} \lambda_{\dot{a}} \tag{5.70}$$

という関係で結ばれることから $\mathcal{E}$ と E の対応関係がわかる．実際には，射影空間上の正則線形束に対するこのような構成法が代数幾何学で先行して知られていて，そこから前述のような反自己双対方程式の解が見出されたのである．

3.4　反自己双対性の確認

(5.65) で与えられる A が反自己双対方程式を満たすことを確かめよう．そのために多少の準備が必要となる．

(5.65) に基づいて曲率成分 $F_{\mu\nu}$ を素直に計算すれば

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} = \partial_\mu V(x)\cdot\partial_\nu V(x)^* - \partial_\nu V(x)\cdot\partial_\mu V(x)^* \\ - \partial_\mu V(x)\cdot P(x)\cdot\partial_\nu V(x)^* + \partial_\nu V(x)\cdot P(x)\cdot\partial_\mu V(x)^*\end{aligned}$$

となる．ここに現れた行列

$$P(x) = V(x)^*V(x) \tag{5.71}$$

は $\boldsymbol{C}^{2k+N}$ から $\mathcal{E}_x$ への直交射影 $v \mapsto vP(x)$ を与えるもので，

$$P(x)^2 = P(x), \quad P(x)\Delta(x) = 0 \tag{5.72}$$

という条件を満たすエルミート行列としても特徴づけられる．この $P(x)$ に対して次のような別表示が得られる．

補題 5.6　$P(x)$ は

$$P(x) = 1 - \Delta(x)\cdot(\sigma_0\otimes D(x)^{-1})\cdot\Delta(x)^* \tag{5.73}$$

とも表せる．

注意　$\sigma_0\otimes D(x)^{-1}$ は $\sigma_0\otimes D(x)$ と同様の略記法であり，

$$\sigma_0\otimes D(x)^{-1} = \begin{pmatrix} D(x)^{-1} & 0 \\ 0 & D(x)^{-1}\end{pmatrix}$$

という行列を表す．$\Delta(x)$ に関する仮定 (5.49) から $\operatorname{rank}\Delta(x)^*\Delta(x) = 2k$ が従うが，それと (5.48) を組み合わせると $\operatorname{rank} D(x) = k$ すなわち $D(x)$ の可逆性がわかる．

証明 証明したい等式の右辺を仮に $Q(x)$ という記号で表す：

$$Q(x) = 1 - \Delta(x) \cdot (\sigma_0 \otimes D(x)^{-1}) \cdot \Delta(x)^*$$

$D(x)$ はエルミート行列であり，したがって $Q(x)$ もエルミート行列である．また (5.48) に注意して $Q(x)^2$ を計算すれば，$Q(x)^2 = Q(x)$ という等式が成立することもただちにわかる．さらに，(5.48) を

$$(\sigma_0 \otimes D(x)^{-1}) \cdot \Delta(x)^* \Delta(x) = 1$$

と書き直して左から $\Delta(x)$ を乗じれば

$$\Delta(x) \cdot (\sigma_0 \otimes D(x)^{-1}) \cdot \Delta(x)^* \Delta(x) = \Delta(x)$$

となるが，右辺を左辺へ移項すればこれは $Q(x)\Delta(x) = 0$ という等式にまとまる．こうして $Q(x)$ が $P(x)$ を特徴づける性質をすべて有することがわかる．したがって $Q(x) = P(x)$ が成立する．□

$P(x)$ に対するこの表示ならびに $V(x)\Delta(x) = 0$ および $\Delta(x)^* V(x)^* = 0$ という等式を用いて前述の $F_{\mu\nu}$ の計算結果を書き直せば

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} = V(x) \cdot \partial_\mu \Delta(x) \cdot (\sigma_0 \otimes D(x)^{-1}) \cdot \partial_\nu \Delta(x)^* \cdot V(x)^* \\ - V(x) \cdot \partial_\nu \Delta(x) \cdot (\sigma_0 \otimes D(x)^{-1}) \cdot \partial_\mu \Delta(x)^* \cdot V(x)^* \end{aligned}$$

となる．ところで，$\Delta(x)$ は (5.47) が示すような x の 1 次式の行列であるから，その導函数は

$$\partial_\mu \Delta(x) = M \cdot (\partial_\mu x \otimes 1)$$

と表せる．ここに現れた $\partial_\mu x \otimes 1$ は（定数行列であるが）$\sigma_0 \otimes D(x)^{-1}$ と可換なので，$F_{\mu\nu}$ に対して最終的に

$$F_{\mu\nu} = V(x) M \cdot ([\partial_\mu x, \partial_\nu x^*] \otimes D(x)^{-1}) \cdot M^* V(x)^* \tag{5.74}$$

という表示式が得られる．これを微分形式に書き直せば

$$F = V(x) M \cdot ((dx \wedge dx^*) \otimes D(x)^{-1}) \cdot M^* V(x)^* \tag{5.75}$$

となる．次の補題によってこれが反自己双対な微分形式の行列であることがわかる．

補題 5.7 2×2 行列 $dx \wedge dx^*$ の各行列要素は反自己双対な微分形式である.

証明 具体的に書き下せば

$$dx \wedge dx^* = \begin{pmatrix} dy & -d\bar{z} \\ dz & d\bar{y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d\bar{y} & d\bar{z} \\ -dz & dy \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} dy \wedge d\bar{y} - dz \wedge d\bar{z} & -2d\bar{z} \wedge dy \\ 2dz \wedge d\bar{y} & d\bar{y} \wedge dy - d\bar{z} \wedge dz \end{pmatrix}$$

となる. 各行列要素は確かに反自己双対な微分形式である. □

以上によって次のことが確かめられた.

定理 5.4 (5.65) は反自己双対方程式の解を与える.

4 複素時空上の反自己双対方程式

ユークリッド時空の反自己双対方程式において時空座標 x^μ を複素変数と読み替えたものが複素時空上の反自己双対方程式である. この方程式（複素化された反自己双対方程式）はユークリッド時空の場合と同様にある線形微分方程式系の可積分条件の形に書き直せるが, 複素時空の場合にはこれを線形束の接続の「部分的平坦性」と解釈することができる. このことによって可積分系（integrable system）特にソリトン方程式（soliton equation）との類似性が明らかになる. この類似性が表面的なものではないことを示す例として, ソリトン方程式の解法の一つをこの方程式に適用して特殊解を構成する.

4.1 複素化された反自己双対方程式

以下ではユークリッド時空の座標 x^μ をそのまま複素変数に読み替えたものを複素時空 $\mathbf{CM} = \boldsymbol{C}^4$ の座標として扱う. これまでどおり $x^{a\dot{a}}$ や $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ を

$$x^{0\dot{0}} = y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + ix^4), \quad x^{0\dot{1}} = -\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x^1 + ix^2),$$
$$x^{1\dot{0}} = z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + ix^2), \quad x^{1\dot{1}} = \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - ix^4)$$

と定義する．これらはいずれも **CM** 上の複素座標系である．特に $\bar{y}, \bar{z}$ と y, z は独立変数であり，互いに複素共役であることは要求されない．この設定のもとで A_μ を複素時空座標の行列値正則函数と見なし，ユークリッド時空の場合と見かけ上同じ形の方程式

$$F_{yz} = 0, \quad F_{\bar{y}\bar{z}} = 0, \quad F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}} = 0$$

を考える．これが複素化された反自己双対方程式（complexified anti-self-duality equation）である．混乱の恐れがない限り，この方程式を単に反自己双対方程式と呼ぶことにする．正確に言えば，複素リー群 $G \subseteq \mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ を指定し，A_μ は G のリー代数 $\mathfrak{g}$ に値を取るものとする．ゲージ変換もこの複素リー群 G に値をもつ正則函数 $h = h(x)$ が引き起こすもの

$$A \to hAh^{-1} - dh \cdot h^{-1}, \quad F \to hFh^{-1}$$

を意味する．ただし，以後は $G = \mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ の場合を考える．

ユークリッド時空の場合と違って，この方程式を **CM** 全体で考えることはあまり意味がなく，通常は適当な領域 $W \subset \mathbf{CM}$ を選んでその上で定義された解を考える．たとえば，ユークリッド時空上の反自己双対方程式の実解析的解は各点のある複素近傍 $W \subset \mathbf{CM}$ において複素化された反自己双対方程式の正則函数解を定める．逆に，複素化された反自己双対方程式の解が適当な付加条件を満たせば，それをユークリッド時空に制限したものが以前の意味での反自己双対方程式の解を与える．以下ではこのユークリッド時空に戻る議論には立ち入らない（たとえば参考文献 [62, 102] などを参照されたい）．

今の場合も複素パラメータ ζ を導入して上の方程式を

$$[D_{\bar{y}} - \zeta D_z,\, D_{\bar{z}} + \zeta D_y] = 0 \tag{5.76}$$

という形にまとめることができる．この方程式は N 成分ベクター値の未知正則函数 $\psi = {}^{\mathrm{t}}(\psi_1 \ \ldots \ \psi_N)$ に対する線形微分方程式系

$$(D_{\bar{y}} - \zeta D_z)\psi = 0, \quad (D_{\bar{z}} + \zeta D_y)\psi = 0 \tag{5.77}$$

の可積分性（integrability）の条件と見なせる．ユークリッド時空の場合と違って，これは正則函数の枠組みにおけるフロベニウスの定理からの帰結である．

ゲージ変換はこの線形微分方程式系において ψ を

$$\psi \ \to \ h\psi \tag{5.78}$$

と変換することにあたる．(5.76) は可積分系の理論におけるラックス表示（Lax representation）に相当する．ζ はスペクトルパラメータ（spectral parameter）の役割を演じる．ベラビンとザハロフの論文 [9] はこの見方に基づいて反自己双対方程式にソリトン方程式の解法が適用できることを指摘したのである．

幾何学的に言えば，$D = d + A$ を $\mathbf{CM}$ 上の直積束 $\mathcal{E} = \mathbf{CM} \times \boldsymbol{C}^N$ の複素接続（complex connection）†9と見なすとき，(5.76) は D が α 平面 $\alpha_{[\xi]}$ $(\lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}} = \zeta)$ の上で平坦であることを意味する．実際，線形方程式系に現れる微分演算子 $\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z$, $\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y$ は $\mathbf{CM}$ の接ベクターとして $\alpha_{[\xi]}$ の各点における接平面の基底をなすが，(5.76) の左辺はこの基底に関する D の曲率 F の成分を取り出したものに他ならない：

$$F(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z,\, \partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y) = [D_{\bar{y}} - \zeta D_z,\, D_{\bar{z}} + \zeta D_y] \tag{5.79}$$

複素化された反自己双対方程式はこのように曲率が各 α 平面上で消えるという意味での部分的平坦性を表わす条件である．ツイスター理論ではこのことを「右平坦（right-flat）」†10という言葉で指すことが多い．

4.2　ヤンの方程式

複素化された反自己双対方程式は 1 個の行列値ポテンシャルに対する微分方程式系に帰着する．この方程式はヤン [109] によって見出されたのでヤンの方程式（Yang's equation）と呼ばれる．

ヤンの方程式を導くには反自己双対方程式を構成する 3 個の方程式のうち $F_{yz} = 0$ と $F_{\bar{y}\bar{z}} = 0$ に注目する．これらはそれぞれ行列値未知函数 $h = h(x)$, $k = k(x)$ に対する線形微分方程式系

†9 実多様体の構造に基づく本来の意味の接続ではなく，その複素類似（実変数を複素変数に読み替えて得られる）というべきものなので，このように呼ぶことにする．これに伴う曲率などの概念も同様に解釈する．複素多様体の正則接束上の非退化正則 2 次形式 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ を「複素計量」と呼ぶのと同様の言葉遣いである．

†10 曲率の自己双対部分はスピンの右回り成分に相当するので，それが消えているという意味でこの言葉を用いる．

$$D_y h = 0, \quad D_z h = 0, \tag{5.80}$$

$$D_{\bar{y}} k = 0, \quad D_{\bar{z}} k = 0 \tag{5.81}$$

の可積分条件であり，$\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値の解 $h = h(x)$, $k = k(x)$ が局所的に（すなわち考えている時空領域の各点の近傍で）存在する．ヤンの導入した行列値ポテンシャルは

$$J = h^{-1} k \tag{5.82}$$

で与えられる．

J の満たす微分方程式は以下のようにして求められる．接続の成分を h によってゲージ変換すれば

$$h^{-1} \circ D_y \circ h = \partial_y, \quad h^{-1} \circ D_z \circ h = \partial_z,$$
$$h^{-1} \circ D_{\bar{y}} \circ h = \partial_{\bar{y}} - \partial_{\bar{y}} J \cdot J^{-1}, \quad h^{-1} \circ D_{\bar{z}} \circ h = \partial_{\bar{y}} - \partial_{\bar{z}} J \cdot J^{-1}$$

となる．このゲージ変換によって (5.76) は

$$[\partial_{\bar{y}} - \partial_{\bar{y}} J \cdot J^{-1} - \zeta \partial_z, \partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} J \cdot J^{-1} + \zeta \partial_y] = 0 \tag{5.83}$$

に変わる．これを ζ について展開すれば，ζ^0, ζ^2 の係数は恒等式で，ζ の係数から

$$\partial_y (\partial_{\bar{y}} J \cdot J^{-1}) + \partial_z (\partial_{\bar{z}} J \cdot J^{-1}) = 0 \tag{5.84}$$

という方程式が得られる．これは

$$\partial_{\bar{y}} (J^{-1} \partial_y J) + \partial_{\bar{z}} (J^{-1} \partial_z J) = 0 \tag{5.85}$$

と書き直すこともできる．これがヤンの方程式である．

注意 1 この方程式はクライン–ゴルドン方程式（正確に言えば，それをウィック回転したラプラス方程式）の非線形版と見ることができる．実際，J がスカラー値であれば，$J = e^{i\phi}$ と変数変換することによって ϕ に対するラプラス方程式

$$(\partial_y \partial_{\bar{y}} + \partial_z \partial_{\bar{z}}) \phi = 0$$

が得られる．ここでは説明を省くが（たとえば参考文献 [62] を参照されたい），ヤンの方程式をユークリッド時空に戻したものは適当な作用汎函数のオイラー–ラグラン

ジュ方程式として導出することもできる．

注意 2 ヤンの方程式をさらに別の行列値ポテンシャル函数 $K = K(x)$ に対する方程式に書き直すこともできる．K は

$$\partial_y K = -\partial_{\bar{z}} J \cdot J^{-1}, \quad \partial_z K = \partial_{\bar{y}} J \cdot J^{-1} \tag{5.86}$$

という方程式で導入される．その可積分性はヤンの方程式自体によって保証される．K に対する方程式を求めるには (5.83) を K で書き直したもの

$$[\partial_{\bar{y}} - \partial_z K - \zeta\partial_z,\, \partial_{\bar{z}} + \partial_y K + \zeta\partial_y] = 0 \tag{5.87}$$

を考えればよい．これを ζ について展開すれば，ここでは ζ, ζ^2 の係数が恒等式で，ζ^0 の係数から

$$(\partial_y\partial_{\bar{y}} + \partial_z\partial_{\bar{z}})K + [\partial_y K, \partial_z K] = 0 \tag{5.88}$$

という方程式が得られる．ヤンの方程式と違ってこの方程式は4次元の直交変換（ウィック逆回転すればローレンツ変換）に関する共変性をもたないが，この方程式も適当な作用汎函数によってオイラー–ラグランジュ方程式として導くことができる（参考文献[62] を参照されたい）．なお，y, z と $\bar{y}, \bar{z}$ の役割を入れ替えればもう一つの行列値ポテンシャル $\bar{K} = \bar{K}(x)$ を導入することもできる．それも K と同様の性質をもつ．

注意 3 h, k は線形微分方程式系 (5.77) の解と関係がある．すなわち，(5.77) の $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値の解 $\Psi = \Psi(x, \zeta)$ が $\zeta = 0, \infty$ の近傍で定義されていれば

$$h = \Psi(x, \infty), \quad k = \Psi(x, 0) \tag{5.89}$$

は上で述べたような行列値ポテンシャルになる．J の満たす方程式を求めるために h によるゲージ変換を行ったが，それは (5.77) をゲージ変換して解 $\Psi = \Psi(x, \zeta)$ を

$$\Psi(x, \infty) = 1 \tag{5.90}$$

と正規化することに相当する．このとき J が

$$J = \Psi(x, 0) \tag{5.91}$$

というように読み取れる．なお，後に紹介する分解問題の設定では $\zeta = \infty$ と $\zeta = 0$ のそれぞれの近傍において異なる解 $\Psi = \Psi_\infty(x, \zeta), \Psi_0(x, \zeta)$ を考えるが，$\zeta = \infty, 0$ のそれぞれにおいてこれらの解を使い分ければ上と同様の関係式が成立する．したがって J を読み取るには

$$\Psi_\infty(x, \infty) = 1 \tag{5.92}$$

という正規化を行って

$$J = \Psi_0(x, 0) \tag{5.93}$$

とすればよい．

4.3　有理函数の行列を用いる特殊解の構成法

(5.76) をラックスと見なすことによってソリトン方程式のさまざまな解法を反自己双対方程式にも適用することができる．その一例として，スペクトルパラメータの有理函数の行列を用いる特殊解の構成法を $G = \mathrm{GL}(2, \boldsymbol{C})$ の場合に紹介する．この構成法は元来ザハロフたちが各種のソリトン方程式の特殊解を構成するために開発したもので，最初の開発者の名前を冠してザハロフ–シャバット法（Zakharov-Shabat method），あるいは彼らの用いた用語である「零点をもつリーマン–ヒルベルト問題」（Riemann-Hilbert problem with zeroes）など，さまざまな名称で呼ばれる．ちなみに，ベラビンとザハロフはこれを用いてインスタントン数 $k = 1, 2$ の反インスタントン解を構成しているが，一般の反インスタントン解をこのようにして構成することは（不可能ではないとしても）技術的に困難である．

ソリトン方程式の場合にも共通することであるが，今の場合も (5.77) の解となるべき行列値函数から先に構成する．次に，$A_y, A_z, A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}$ を適当に選ぶことによってそれが (5.77) を満たすことを示す．そこから可積分条件として (5.76) が従う．これらの手順を順次説明して行こう．

i)　まず，(5.77) の解となるべき 2×2 行列値函数

$$X(\zeta) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{R_j}{\zeta - \alpha_j} \tag{5.94}$$

ならびにその逆行列となるべき 2×2 行列値函数

$$Y(\zeta) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{S_j}{\zeta - \beta_j} \tag{5.95}$$

から出発する．ここで極の位置 α_j, β_j が重ならないこと

$$\alpha_j \neq \alpha_k,\ \beta_j \neq \beta_k \quad (j \neq k), \tag{5.96a}$$

$$\alpha_j \neq \beta_k \quad (j, k = 1, \ldots, m) \tag{5.96b}$$

を仮定する．$X(\zeta)$ と $Y(\zeta)$ が互いに逆行列であるためには次の補題の条件が満たされればよい．

補題 5.8　$X(\zeta)Y(\zeta)$ が $\zeta = \alpha_j, \beta_j \quad (j = 1, \ldots, m)$ の各点において正則ならば，$X(\zeta)Y(\zeta) = 1$ となる．

証明　この条件が満たされれば $X(\zeta)Y(\zeta)$ は ζ に関して $\mathbf{CP}^1$ 全体で正則な行列値函数である．リウビルの定理によってそのような正則函数は定数しかない．$\zeta = \infty$ での値を見ればこの定数値は 1 である．□

補題の条件が満たされるためには $X(\zeta)Y(\zeta)$ の $\zeta = \alpha_j, \beta_j$ における留数が消えればよい．留数が消える条件は

$$R_j Y(\alpha_j) = 0,\ X(\beta_j) S_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

という等式の形に表せる．特に，R_j, S_j は階数 1 の行列になる．そこで R_j, S_j を 2 成分ベクター a_j, b_j, c_j, d_j によって

$$R_j = c_j\, {}^{\mathrm{t}}a_j, \quad S_j = b_j\, {}^{\mathrm{t}}d_j$$

という形に表せば，上の条件は

$${}^{\mathrm{t}}a_j Y(\alpha_j) = 0,\ X(\beta_j) b_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{5.97}$$

に帰着する．$X(\zeta), Y(\zeta)$ の定義式を用いてこれを書き直せば

$${}^{\mathrm{t}}a_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{{}^{\mathrm{t}}a_j b_k}{\alpha_j - \beta_k}\, {}^{\mathrm{t}}d_k = 0, \quad b_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{{}^{\mathrm{t}}b_j a_k}{\beta_j - \alpha_k} c_k = 0 \tag{5.98}$$

となる（${}^{\mathrm{t}}a_j b_k$ と ${}^{\mathrm{t}}b_j a_k$ はスカラーであることに注意されたい）．これは a_j, b_j を与えて c_j, d_j を決める連立線形方程式と見なすことができる．ソリトン方程式の場合によく知られているように，この方程式は例外的な場合を除けば一意的に解ける．以下ではそのことを仮定する．

ii)　次に，$X(\zeta)$ が (5.77) の形の方程式を満たすための条件を求める．これは次の補題に基づく．

補題 5.9　$(\partial_{\bar{y}}-\zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ が $\zeta=\alpha_j,\beta_j$（$j=1,\ldots,m$）の各点において正則ならば，ζ に依存しない行列となる．同様のことが $(\partial_{\bar{z}}+\zeta\partial_y)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ についても成立する．

証明　この条件が満たされれば $(\partial_{\bar{y}}-\zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ は ζ に関して $\mathbf{CP}^1$ 上で $\zeta=\infty$ を除いて正則である．さらに $X(\infty)=Y(\infty)=1$ なので $\zeta=\infty$ でも正則である．リウビルの定理によってそのような行列値函数は定数行列しかない．

注意　$X(\zeta)$ の主導項を単位行列ではなくて一般の可逆行列 h に選べば，ζ に依存しない行列の代わりに ζ の 1 次式の行列が現れる．この場合も以後の議論は実質的に変わらず，h^{-1} によるゲージ変換で $h=1$ の場合に帰着することもできる．□

この補題の条件が満たされれば，ζ に依存しない行列 $B_{\bar{y}},B_{\bar{z}}$ が存在して

$$(\partial_{\bar{y}}-\zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)=-B_{\bar{y}},$$
$$(\partial_{\bar{z}}+\zeta\partial_y)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)=-B_{\bar{z}}$$

となる．$\zeta=0$ での値から $B_{\bar{y}},B_{\bar{z}}$ が

$$B_{\bar{y}}=-\partial_{\bar{y}}X(0)\cdot Y(0),\quad B_{\bar{z}}=-\partial_{\bar{z}}X(0)\cdot Y(0)$$

で与えられることが読み取れる．そこで

$$\Psi=X(\zeta),\quad J=X(0) \tag{5.99}$$

とおけば，$X(\zeta),Y(\zeta)$ については $Y(\zeta)=X(\zeta)^{-1}$ という関係があるので，

$$(\partial_{\bar{y}}-\partial_{\bar{y}}J\cdot J^{-1}-\zeta\partial_z)\Psi=0, \tag{5.100}$$
$$(\partial_{\bar{z}}-\partial_{\bar{z}}J\cdot J^{-1}+\zeta\partial_y)\Psi=0 \tag{5.101}$$

という方程式が満たされることがわかる．そこから J に対するヤンの方程式が従うので，反自己双対方程式の解が得られたことになる．

iii)　上の補題の条件も留数の計算によって a_j,b_j,α_j,β_j の言葉に翻訳できる．それは最終的には a_j,b_j,α_j,β_j に対する微分方程式になる[†11]．まず $(\partial_{\bar{y}}-\zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ について考えよう．

[†11] 通常のソリトン方程式の場合には有理函数の行列の極の位置（今の場合の α_j,β_j）は定

補題 5.10　$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ が $\zeta = \alpha_j, \beta_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ の各点で正則であるためには

$$\partial_{\bar{y}}\alpha_j - \alpha_j\partial_z\alpha_j = 0, \quad \partial_{\bar{y}}\beta_j - \beta_j\partial_z\beta_j = 0, \tag{5.102}$$

$$\partial_{\bar{y}}a_j - \alpha_j\partial_z a_j = 0, \quad \partial_{\bar{y}}b_j - \beta_j\partial_z b_j = 0 \tag{5.103}$$

という方程式が満たされればよい．

証明　$X(\zeta)$ の定義式に即して計算すれば $\zeta \to \alpha_j$ において

$$\begin{aligned}&(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)X(\zeta)\\&= \frac{(\partial_{\bar{y}}\alpha_j - \alpha_j\partial_z\alpha_j)R_j}{(\zeta-\alpha_j)^2} + \frac{-(\alpha_j\partial_z\alpha_j)R_j + \partial_{\bar{y}}R_j - \alpha_j\partial_z R_j}{\zeta - \alpha_j} + O(1)\end{aligned}$$

となることがわかる．右から $Y(\zeta)$ を乗じて $R_jY(\alpha_j) = 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned}&(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)\\&= \frac{(\partial_{\bar{y}}\alpha_j - \alpha_j\partial_z\alpha_j)R_jY'(\alpha_j) + (\partial_{\bar{y}}R_j - \alpha_j\partial_z R_j)Y(\alpha_j)}{\zeta-\alpha_j} + O(1)\end{aligned}$$

を得る．したがってこれが $\zeta = \alpha_j$ で正則であるためには

$$\partial_{\bar{y}}\alpha_j - \alpha_j\partial_z\alpha_j = 0, \quad (\partial_{\bar{y}}R_j - \alpha_j\partial_z R_j)Y(\alpha_j) = 0$$

という二つの等式が成立すればよい．第1の等式は補題の主張する方程式の一つであるが，第2の等式も $R_j = c_j\,{}^{\mathrm{t}}a_j$ を代入して ${}^{\mathrm{t}}a_jY(\alpha_j) = 0$ に注意すれば

$$\partial_{\bar{y}}\,{}^{\mathrm{t}}a_j - \alpha_j\partial_z\,{}^{\mathrm{t}}a_j = 0$$

に帰着して，やはり補題の主張する方程式になる．同様にして $(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ が $\zeta = \beta_j$ で正則となる条件を求めれば補題の主張にある残りの方程式が得られる．□

同じ議論を $(\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)X(\zeta)\cdot Y(\zeta)$ に対して繰り返せば，それが $\zeta = \alpha_j, \beta_j$ において正則であるための条件として

数であるが，反自己双対方程式とその仲間の方程式（ボゴモルニー方程式など）では極が動くことが許される．

$$\partial_{\bar z}\alpha_j + \alpha_j \partial_y \alpha_j = 0,\ \partial_{\bar z}\beta_j + \beta_j \partial_y \beta_j = 0, \tag{5.104}$$

$$\partial_{\bar z}a_j + \alpha_j \partial_y a_j = 0,\ \partial_{\bar z}b_j + \beta_j \partial_y b_j = 0 \tag{5.105}$$

という方程式が得られる．

iv) 残る問題は (5.102), (5.103), (5.104), (5.105) の解を求めることである．以下に示すように，これは第 2 章の冒頭で触れたカーの定理の応用問題である．

1. α_j, β_j に対する方程式 (5.102), (5.104) は無剪断ナル叢を記述する方程式に他ならない．カーの定理によれば，その解は任意正則函数 $F_j(w^0, w^1, \zeta), G_j(w^0, w^1, \zeta)$ から

$$\begin{aligned} F_j(y - \alpha_j \bar z,\, z + \alpha_j \bar y,\, \alpha_j) &= 0, \\ G_j(y - \beta_j \bar z,\, z + \beta_j \bar y,\, \beta_j) &= 0 \end{aligned} \tag{5.106}$$

という方程式の定める陰函数として得られる．ちなみに，これらの方程式を α_j, β_j で「部分的に解いた」形

$$\begin{aligned} \alpha_j &= f_j(y - \alpha_j \bar z,\, z + \alpha_j \bar y), \\ \beta_j &= g_j(y - \beta_j \bar z,\, z + \beta_j \bar y) \end{aligned} \tag{5.107}$$

に設定することもできる．このとき

$$\alpha_j|_{\bar y = \bar z = 0} = f_j(y, z), \quad \beta_j|_{\bar y = \bar z = 0} = g_j(y, z) \tag{5.108}$$

が成立するので，これは $\bar y, \bar z$ を「時間変数」，$f_j(y,z), g_j(y,z)$ を「初期データ」と見なす一種の初期値問題の解法と解釈できる．

2. a_j, b_j は 2 成分ベクター値の任意正則函数 $a_j(w^0, w^1, \zeta), b_j(w^0, w^1, \zeta)$ から

$$\begin{aligned} a_j &= a_j(y - \alpha_j \bar z,\, z + \alpha_j \bar y,\, \alpha_j), \\ b_j &= b_j(y - \beta_j \bar z,\, z + \beta_j \bar y,\, \beta_j) \end{aligned} \tag{5.109}$$

という形で求められる．これはロビンソンの定理の類似と言えるだろう．

このような $a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j$ から出発し，(5.98) を解いて c_j, d_j を定めれば，$X(\zeta)$ を通じて最終的に反自己双対方程式の解（特にヤンの行列値ポテンシャル J）が得られる．

注意 以上の手順は反自己双対方程式の既知の解から新たな解を構成することにも応用できる．すなわち，既知の解に対応する (5.77) の解 $\Phi(\zeta)$ から出発して $\Psi(\zeta) = X(\zeta)\Phi(\zeta)$ の形で新たな解に対応する (5.77) の解 $\Psi(\zeta)$ を求めることができる．$\Phi(\zeta)$ から $\Psi(\zeta) = X(\zeta)\Phi(\zeta)$ をつくることを着付け（dressing）という．その意味でこの解の構成法は着付け法（dressing method）と呼ばれる．特に $\Phi(\zeta) = 1$（反自己双対方程式の自明解 $A = 0$ に対応する）に選んだのが上で説明した場合である．ちなみに，ソリトン方程式の場合には自明解に対する $\Phi(\zeta)$ が指数函数の行列（方程式によって異なる）になる．

5 ウォード変換

この節では複素化された反自己双対方程式の解をツイスター空間上の正則線形束と対応づけるウォード変換 [95] について解説する．ユークリッド空間の場合に見たように，複素時空の場合もツイスター空間に現れる正則線形束は特別な条件を満たすものになる．この変換の復路すなわち正則線形束からゲージ場に戻る逆変換は無質量自由場に対するペンローズ変換に相当するが，今の場合には非線形性のために周回積分よりも複雑な手順が必要になる．この逆変換を具体的に実行できる例として，アティヤ–ウォード仮設解と呼ばれる解を紹介する．

5.1 基本的設定

ウォード変換（Ward transformation）は複素化された反自己双対方程式の解とツイスター空間上のある種の正則線形束の間の対応づけを与える．以下では $G = \mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ の場合を考えるが，その他の複素リー群でも同じことが成立する．

ユークリッド時空の場合と違って，複素時空では旗多様体が時空とツイスター空間を仲介するものとして基本的な役割を演じる．ここでは $\mathbf{CM}$ の上で考察を進めるので，ツイスター空間の側も $\mathbf{PT}'$ の部分のみが問題になる．時空座標 $x = (x^{a\dot{a}})$ とツイスター座標 $\xi = (\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ は

$$\mu^a = x^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} \tag{5.110}$$

という関係式で結ばれる（今の場合はユークリッド時空を複素化した設定で考

えているので，右辺に虚数単位を入れない）．第 2 章でミンコフスキー時空を複素化した場合について説明したように，この関係式を幾何学的に見直せば

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{F}' \simeq \mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1 & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ \mathbf{CM} & & \mathbf{PT}' \end{array}$$

という対応図式になる．$x \in \mathbf{CM}$ と $[\lambda] \in \mathbf{CP}^1$ の対 $(x, [\lambda])$ を旗多様体 $\boldsymbol{F} = \mathrm{Fl}(1, 2, \boldsymbol{T})$ の開部分集合 $\boldsymbol{F}'$ の点と見なすことによって正則同型 $\boldsymbol{F}' \simeq \mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1$ が得られるわけだが，この同一視のもとで射影 p_1, p_2 はそれぞれ

$$p_1(x, [\lambda]) = [\xi], \quad \xi = (x^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}}) \tag{5.111}$$

および

$$p_2(x, [\lambda]) = x \tag{5.112}$$

と表される．

ウォード変換を定式化するため，ペンローズ変換の場合と同様に，$\mathbf{CM}$ のある開集合 W を選び，それに対応する $\boldsymbol{F}'$ と $\mathbf{PT}'$ の部分集合

$$V = p_2^{-1}(W), \quad U = p_1(V) \tag{5.113}$$

を考える．p_2 は連続写像なので V はもちろん開集合であるが，p_1 は極大階数の開写像でもあるので，U も開集合になる．さらに，以下では W に関して

$$\text{任意の } [\xi] \in U \text{ に対して } W \cap \alpha_{[\xi]} \text{ は連結かつ単連結である} \tag{5.114}$$

という条件が満たされることを仮定する．たとえば W が $\mathbf{CM} = \boldsymbol{C}^4$ の凸集合であればこの条件は満たされる．ウォード変換は W 上の反自己双対方程式の正則函数解を U 上の特別な性質をもつ正則線形束と対応づけるものとして定式化される．

5.2 順変換

複素化された反自己双対方程式の場合もツイスター空間上の正則線形束は線形微分方程式系 (5.77) を介して構成される．この正則線形束の定義の仕方には，ユークリッド時空の場合と同様に，抽象的な構成法によるものと変換函数を用いる具体的なものとがある．詳しい説明は省くが（原論文 [95] や参考文献 [62, 102] を参照されたい），これらから得られる正則線形束は互いに同型になるので，二つの構成法に実質的な違いはない．

抽象的な構成法では，反自己双対方程式の解を W 上の直積束 $\mathcal{E} = W \times \boldsymbol{C}^N$ 上の複素接続と見なして，U の各点 $[\xi]$ に対して

$$\tilde{\mathcal{E}}_{[\xi]} = \{\psi \in \Gamma(W \cap \alpha_{[\xi]}, \mathcal{E}) \mid D\psi = 0\} \tag{5.115}$$

という複素線形空間を対応させる．反自己双対性から D は α 平面上で平坦なので，フロベニウスの定理によってこの複素線形空間は N 次元である．(ここで $W \cap \alpha_{[\xi]}$ が連結かつ単連結であるという仮定を用いる)．さらに，線形常微分方程式の解は方程式の正則パラメータの正則函数になる，というよく知られた結果[†12]によってこの複素線形空間は $[\xi]$ に正則に依存する．したがってこれらを U の各点に乗せたもの

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{[\xi] \in U} \tilde{\mathcal{E}}_{[\xi]} \tag{5.116}$$

は U 上の正則線形束となる．

変換函数による構成法では，(5.77) を $\boldsymbol{F}' \simeq \mathbf{CM} \times \mathbf{CP}^1$ の開集合 V 上の方程式と見なす．(5.77) はフロベニウスの意味で可積分なので，V の適当な開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を選べば，各 V_α 上には $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値正則函数解 Ψ_α が存在する．(5.77) の N 成分ベクター値の任意の解 ψ に対して $v_\alpha = \Psi_\alpha^{-1}\psi$ とおけば，v_α は

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)v_\alpha = 0, \quad (\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)v_\alpha = 0 \tag{5.117}$$

を満たす．言い換えれば，v_α はツイスター空間の開集合 $U_\alpha = p_1(V_\alpha)$（それ

[†12] フロベニウスの定理の証明は常微分方程式の問題に帰着するので（参考文献 [120] を参照されたい），常微分方程式と同じことが成立する．

を集めたもの $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は U の開被覆となる）で定義されたベクター値正則函数を V_α 上に引き戻したものである．ψ はそれを用いて $\psi = \Psi_\alpha v_\alpha$ と表せる(ユークリッド時空の場合にも注意したように，これは線形微分方程式の解を「基本解系」と「任意定数」で表す表示に相当する)．v_α 同士は $v_\alpha = \Psi_\alpha^{-1}\Psi_\beta v_\beta$ という関係式で結ばれる．ここに現れた $\mathrm{GL}(N,\boldsymbol{C})$ 値函数

$$g_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha^{-1}\Psi_\beta \tag{5.118}$$

は $(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)g_{\alpha\beta} = 0$, $(\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)g_{\alpha\beta} = 0$ を満たすので，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上の行列値正則函数 $g_{\alpha\beta}(w^0, w^1, \zeta)$ を p_1 によって $V_\alpha \cap V_\beta$ に引き戻したもの

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(y - \zeta\bar{z}, z + \zeta\bar{y}, \zeta)$$

と見なせる．引き戻す前の $g_{\alpha\beta}(w^0, w^1, \zeta)$ を変換函数として U 上に正則線形束

$$E = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times \boldsymbol{C}^N \ / \ \sim \tag{5.119}$$

が定まる．函数の組 $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ はこの正則線形束の U 上の正則断面と見なせる．ユークリッド時空の場合と同じ議論によって，E のツイスター直線 Γ_x $(x \in W)$ への制限 $E|_{\Gamma_x}$ が正則自明束であることがわかる．

変換函数で定義された E は開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ やその上の解の組 $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の選び方に依存するが，丁寧に調べれば容易にわかるように，それによる E の違いは正則同型類の中にとどまる．さらに，W 上の $\mathrm{GL}(N,\boldsymbol{C})$ 値正則函数 $h = h(x)$ によるゲージ変換（正則ゲージ変換）は Ψ_α を $h\Psi_\alpha$ に変えるだけなので，$g_{\alpha\beta}$（したがって正則線形束）は不変に保たれる．

以上のようにして，ウォード変換の往路 $A \mapsto E$ に関して次のことがわかる．

定理 5.5 複素化された反自己双対方程式の W 上の正則函数解 A の正則ゲージ同値類に対して U 上の階数 N の正則線形束 E の正則同型類が決まる．W の各点 x に対して E の Γ_x への制限 $E|_{\Gamma_x}$ は Γ_x 上の正則自明束である．

5.3 逆変換

ウォード変換の復路すなわち正則線形束からゲージ場を再構成することを考えよう．ここでは，はじめから変換函数を用いて議論を進めることにする．変

換函数を用いない抽象的取扱いについては参考文献 [62, 102] を参照されたい．

U 上の階数 N の正則線形束 E が前定理の結論にあるような性質をもつとする．E の局所自明化を与えるような U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を選び，それに関する変換函数 $g_{\alpha\beta}$ を考える．W の各点 x に対して正則同型 $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ によって $\Gamma_x \cap U_\alpha$ と対応する $\mathbf{CP}^1$ の開集合を $D_{\alpha,x}$ という記号で表せば，$\mathbf{CP}^1$ の開被覆

$$\mathbf{CP}^1 = \bigcup_{\alpha\in A} D_{\alpha,x} \tag{5.120}$$

が得られる．$E|_{\Gamma_x}$ は正則自明束だから，x をパラメータとする $D_{\alpha,x}$ 上の $\mathrm{GL}(N,\boldsymbol{C})$ 値正則函数 $\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(x,\zeta)$ が存在して[†13]

$$\Psi_\alpha g_{\alpha\beta} = \Psi_\beta \tag{5.121}$$

という等式が成立する．

この等式 (5.121) から反自己双対方程式が導出できることを示そう．等式の両辺に $\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z$ ならびに $\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y$ を作用させる．$g_{\alpha\beta}$ はツイスター空間上の正則函数なのでこれらの微分演算子が作用すると消えて

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)\Psi_\alpha \cdot g_{\alpha\beta} = (\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)\Psi_\beta,$$
$$(\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)\Psi_\alpha \cdot g_{\alpha\beta} = (\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)\Psi_\beta$$

という等式が残る．改めて (5.121) を用いて $g_{\alpha\beta}$ を消去すれば

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)\Psi_\alpha \cdot \Psi_\alpha^{-1} = (\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)\Psi_\beta \cdot \Psi_\beta^{-1},$$
$$(\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)\Psi_\alpha \cdot \Psi_\alpha^{-1} = (\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)\Psi_\beta \cdot \Psi_\beta^{-1}$$

という等式が得られる．これが $\mathbf{CP}^1$ の前述の開被覆 $\{D_{\alpha,x}\}_{\alpha\in A}$ の空でない共通部分 $D_{\alpha,x}\cap D_{\beta,x}$ のすべてにおいて成立するので，ζ に関して $\mathbf{CP}^1\setminus\{\infty\}$ 全体で定義された行列値正則函数が定まる．この函数は $\zeta=\infty$ においては高々

[†13] 厳密に言えば，ここで $\Psi_\alpha(x,\zeta)$ が x についても正則に依存するように選べること（結果として E の V への引き戻し p_1^*E が V 上の正則自明束となる）を確かめる必要がある．ここではこの議論には立ち入らない（参考文献 [1, 62, 102] を参照されたい）．後で考える分解問題の設定では，分解問題を解く方法（積分方程式や無限次元グラスマン多様体など）に戻って考えれば，x のような変換関数の正則パラメータに関する解の正則性も確かめられる．

1位の極をもつ．リウビルの定理によってそのような函数は ζ の1次式に限られる．こうして x の行列値正則函数 $A_y, A_z, A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}$ が存在して

$$(\partial_{\bar{y}} - \zeta\partial_z)\Psi_\alpha \cdot \Psi_\alpha^{-1} = -(A_{\bar{y}} - \zeta A_z), \tag{5.122a}$$

$$(\partial_{\bar{z}} + \zeta\partial_y)\Psi_\alpha \cdot \Psi_\alpha^{-1} = -(A_{\bar{z}} + \zeta A_y) \tag{5.122b}$$

という等式が成立することがわかる．これは Ψ_α が $A_y, A_z, A_{\bar{y}}, A_{\bar{z}}$ を係数として (5.77) を満たすことを意味する．それから反自己双対方程式のラックス表示 (5.76) が従う．

こうして正則線形束 E から反自己双対方程式の解 A が得られたが，この構成を反省してみればそこには次のような任意性があることがわかる：

1. U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の選び方
2. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に関する E の局所自明化の選び方
3. (5.121) を満たす行列値正則函数の組 $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の選び方

最初の二つの任意性は E を同型な正則線形束に置き換えることに相当する．これらの任意性によって A も変わるわけだが，以下に見るように，その変化は A の正則ゲージ変換にとどまる．まず，開被覆の選び方の違いは共通細分を取れば解消する．次に，開被覆を決めれば E の局所自明化の違いは変換函数を U_α 上の $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値正則函数 k_α によって

$$g_{\alpha\beta} \ \to\ \tilde{g}_{\alpha\beta} = k_\alpha g_{\alpha\beta} k_\beta^{-1} \tag{5.123}$$

と変える変換を引き起こす．これら二組の変換函数系のそれぞれに対して (5.121) を満たす $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値正則函数の組 $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{\tilde{\Psi}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を考える．$\Psi_\alpha, \tilde{\Psi}_\alpha$ が (5.121) を満たすこと $\Psi_\alpha g_{\alpha\beta} = \Psi_\beta$, $\tilde{\Psi}_\alpha \tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{\Psi}_\beta$ から

$$\tilde{\Psi}_\alpha k_\alpha \Psi_\alpha^{-1} = \tilde{\Psi}_\beta k_\beta \Psi_\beta^{-1}$$

という等式が従うが，この等式の両辺は ζ について $\mathbf{CP}^1$ 全体で正則な $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値函数を定める．再びリウビルの定理に訴えれば，これは ζ に依存しない x のみの行列値正則函数 $h = h(x)$ となる．こうして得られる関係式

$$\tilde{\Psi}_\alpha = h\Psi_\alpha k_\alpha^{-1} \tag{5.124}$$

から，$\tilde{\Psi}_\alpha$ の決めるゲージ場 $\tilde{A}$ は Ψ_α の定めるゲージ場 A の h によるゲージ

変換に等しい，ということがわかる．

以上の考察をまとめると次のようになる．

定理 5.6　ウォード変換 $A \mapsto E$ は可逆である．すなわち，U 上の階数 N の正則線形束 E が与えられて W の各点 x に対する Γ_x への制限 $E|_{\Gamma_x}$ が正則自明束であれば，W 上の反自己双対方程式の正則函数解 A が存在して，そのウォード変換は E と正則同型になる．E を同値な正則線形束に置き換えれば，対応するゲージ場はもとのゲージ場 A と正則ゲージ同値なものに変わる．

5.4　分解問題による解の構成

ウォード変換の逆変換は反自己双対方程式の解法と見なすことができる．実際の解の構成においては V を $\zeta = 0$ の部分を含む開集合 V_0 と $\zeta = \infty$ の部分を含む開集合 V_∞ の二つで覆う場合を考えることが多い．詳しく言えば，V の開被覆 $\{V_0, V_\infty\}$ に対応する U の開被覆を $\{U_0, U_\infty\}$ と表すとき，ツイスター直線による切り口 $\Gamma_x \cap U_0$, $\Gamma_x \cap U_\infty$ が正則同型 $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ によって $\mathbf{CP}^1$ 上の $\zeta = 0, \infty$ を中心とする円盤状領域 $D_{0,x}, D_{\infty,x}$ に対応する，という設定で考える．$D_{0,x}, D_{\infty,x}$ は円環状領域で互いに重なり合う．要するに無質量自由場の周回積分表示と同様の状況で考える（図 5.1）．

ウォード変換の逆変換の構成をこの場合に当てはめれば，U_0, U_∞ の間の変換函数 $g = g_{\infty 0}$ に対して V_0, V_∞ 上の $\mathrm{GL}(N, \boldsymbol{C})$ 値函数 Ψ_0, Ψ_∞ が存在して

$$g = \Psi_\infty^{-1} \Psi_0 \tag{5.125}$$

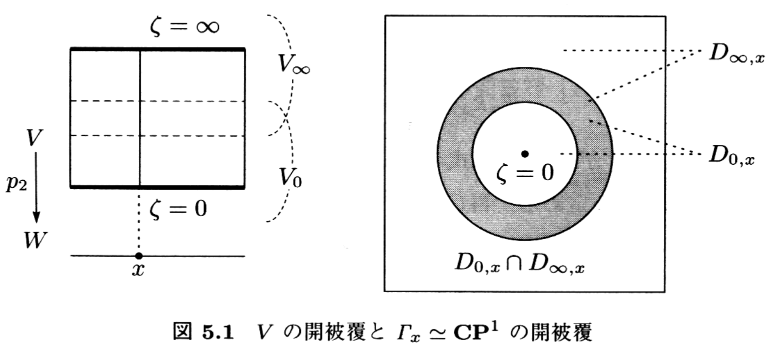


図 5.1　V の開被覆と $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ の開被覆

という等式を満たすことになる．x を止めて ζ の行列値函数と見れば，$\Psi_0 = \Psi_0(x,\zeta)$ は $D_{0,x}$ で正則，$\Psi_\infty = \Psi_\infty(x,\zeta)$ は $D_{\infty,x}$ で正則である．与えられた行列値正則函数 $g = g(x,\zeta)$ に対してこのような行列値函数対を求めることは可積分系の理論ではリーマン–ヒルベルト問題（Riemann-Hilbert problem）あるいは分解問題（factorization problem）の呼び名で基本的技法として広く用いられている．個々の可積分系の特徴は g の函数構造に反映される．反自己双対方程式の場合には g をツイスター空間上の行列値函数の $V_0 \cap V_\infty$ への引き戻し

$$g = g(y - \zeta\bar{z}, z + \zeta\bar{y}, \zeta) \tag{5.126}$$

の形に設定することになる．

この種の分解問題を一般的に解くには積分方程式や無限次元グラスマン多様体などの超越的な方法が必要であるが（たとえば参考文献 [9, 62] を参照されたい），特別な場合には線形代数的に解くこともできる．以下ではその例として $N = 2$ の場合の反自己双対方程式のアティヤ–ウォード仮設解（Atiyah-Ward Ansatz solution）[†14]と呼ばれる特殊解の系列 [5, 16, 98] を紹介する．

アティヤ–ウォード仮設解を得るには

$$g = \begin{pmatrix} \zeta^s & f \\ 0 & \zeta^{-s} \end{pmatrix} \tag{5.127}$$

という形の変換函数に対して分解問題を考える．ここで s は正整数，f はスカラー値の正則函数 $f = f(y-\zeta\bar{z}, z+\zeta\bar{y}, \zeta)$ であって，ζ について $r_\infty < |\zeta| < r_0$ という円環領域で正則であるとする（r_0, r_∞ は定数）．以下に見るように，この場合の分解問題は x に依存しない領域

$$D_0 = \{\zeta \in \mathbf{CP}^1 \mid |\zeta| < r_0\}, \quad D_\infty = \{\zeta \in \mathbf{CP}^1 \mid |\zeta| > r_\infty\}$$

について設定して解くことができる．解は $D_0 \cap D_\infty$ における f のローラン展開

[†14]「Ansatz」は「仮説」と訳されることも多いが，ここでは解をある特定の形に「仮に設定」して求める，という意味で「仮設」と訳している．

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\zeta^{-n}$$

の係数から構成される．ちなみにこれらのローラン係数は ζ に関する周回積分

$$f_n(x) = \oint_{|\zeta|=r} \zeta^n f(y - \zeta\bar{z}, z + \zeta\bar{y}, \zeta)\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{5.128}$$

として表されるので，その一部を取り出せば（複素時空における）無質量自由場の成分として解釈できる．最終的に得られるアティヤ–ウォード仮設解は $f_{-s}, f_{-s+1}, \ldots, f_s$ （スピン s の無質量自由場の成分と見なせる）によって表される．

記号を簡単にするため Ψ_0, Ψ_∞ の行列要素を

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}, \quad \Psi_\infty = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}$$

と表そう．分解問題を $\Psi_\infty g = \Psi_0$ と書き直してこれらの行列要素で書き下せば

$$\psi_{11}\zeta^s = \phi_{11},\ \psi_{21}\zeta^s = \phi_{21} \tag{5.129}$$

$$\psi_{11}f + \psi_{12}\zeta^{-s} = \phi_{12},\ \psi_{21}f + \psi_{22}\zeta^{-s} = \phi_{22} \tag{5.130}$$

となる．これを

$$\Psi(x, \infty) = 1$$

という正規化条件のもとで解くことを考える．(5.129) の両辺は ζ に関する正則性の条件から $\mathbf{CP}^1 \setminus \{\infty\}$ で正則，$\zeta = \infty$ で極をもつ．リウビルの定理によってこれらは ζ の多項式である．Ψ_∞ に対する前述の正規化条件を考慮すれば次数はそれぞれ s および $s-1$ となるので，結果として ϕ_{11}, ϕ_{12} は

$$\phi_{11} = \zeta^s + a_1\zeta^{s-1} + \cdots + a_s,$$
$$\phi_{21} = b_1\zeta^{s-1} + \cdots + b_s$$

という形の多項式であることがわかる．これから得られる ψ_{11}, ψ_{21} の表示を (5.130) へ代入して $\psi_{12} = O(\zeta^{-1})$, $\psi_{22} = 1 + O(\zeta^{-1})$ に注意しつつ両辺をローラン展開すれば，$\zeta^{-1}, \cdots, \zeta^{-s}$ の項から

$$f_1 + f_0 a_1 + \cdots + f_{-s+1} a_s = 0,$$
$$\vdots$$
$$f_s + f_{s-1} a_1 + \cdots + f_0 a_s = 0$$

ならびに

$$f_0 b_1 + \cdots + f_{-s+1} b_s = 0,$$
$$\vdots$$
$$f_{s-2} b_1 + \cdots + f_{-1} b_s = 0,$$
$$f_{s-1} b_1 + \cdots + f_0 b_s + 1 = 0$$

という等式が得られる．これらを $a_1, \ldots, a_s$ と $b_1, \ldots, b_s$ に対する連立線形方程式と見なせばクラメールの公式で解くことができて，最終的には ϕ_{11}, ϕ_{21} に対する行列式表示

$$\phi_{11} = D^{-1} \begin{vmatrix} \zeta^s & \zeta^{s-1} & \cdots & 1 \\ f_1 & f_0 & \cdots & f_{-s+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_s & f_{s-1} & \cdots & f_0 \end{vmatrix}, \tag{5.131}$$

$$\phi_{21} = D^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \zeta^{s-1} & \cdots & 1 \\ 0 & f_0 & \cdots & f_{-s+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & f_{s-2} & \cdots & f_1 \\ 1 & f_{s-1} & \cdots & f_0 \end{vmatrix} \tag{5.132}$$

が得られる．ここで D は

$$D = \begin{vmatrix} f_0 & \cdots & f_{-s+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{s-2} & \cdots & f_1 \\ f_{s-1} & \cdots & f_0 \end{vmatrix}$$

という行列式を表す．さらに同じ (5.130) のローラン展開の ζ^0 の項から

$\phi_{i2} = \phi_{i2}(x, \zeta)$ の $\zeta = 0$ での値を与える等式

$$\phi_{12}(x,0) = f_0 + f_{-1}a_1 + \cdots + f_{-s}a_s,$$

$$\phi_{22}(x,0) = f_{-1}b_1 + \cdots + f_{-s}b_s$$

が得られる．これも行列式の商の形にまとめること

$$\phi_{12}(x,0) = D^{-1} \begin{vmatrix} f_0 & f_{-1} & \cdots & f_{-s} \\ f_1 & f_0 & \cdots & f_{-s+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_s & f_{s-1} & \cdots & f_0 \end{vmatrix}, \tag{5.133}$$

$$\phi_{22}(x,0) = D^{-1} \begin{vmatrix} 0 & f_{-1} & \cdots & f_{-s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & f_{s-2} & \cdots & f_{-1} \\ 1 & f_{s-1} & \cdots & f_0 \end{vmatrix} \tag{5.134}$$

ができる．(5.130) のローラン展開のこれ以外の項から ψ_{12}, ψ_{22} のローラン係数が決まるが，結果は省略する．以上のようにして前述の分解問題は線形代数的に解ける．ヤンの行列値ポテンシャルの行列要素はそこから $J = (\phi_{ij}(x,0))$ というように読み取れる．それらはいずれも D を分母とする行列式の商の形をしていて，アティヤ–ウォード仮設解の最初に発見された表示式 [5, 16] に一致する．

覚え書き

1. ゲージ場のツイスター理論についてはいくつかの解説書がある．アティヤの講義録 [1] はゲージ場と幾何学の関わりを詳しく紹介した古典的名著であるが，複素幾何学や代数幾何学の知識がないと読みこなすのは難しい．ウォードとウェルズの著書 [102] はゲージ場の取扱いについても基礎から丁寧な解説を行っている．メイスンとウッドハウスの著書 [62] はゲージ場のツイスター理論と可積分系との関わりを中心的テーマに据えて，基礎事項から執筆当時の研究の先端までを詳しく紹介している．
2. 反自己双対方程式に定常性（時間に依存しないこと）の条件を課して 3 次元

ユークリッド空間上の場の方程式と見なせばボゴモルニー方程式（Bogomolny equation）と呼ばれるものになる．ボゴモルニー方程式は 3 次元のヤン–ミルズ–ヒッグズ理論（Yang-Mills-Higgs theory）における反自己双対方程式の類似物である．ここでも，インスタントン解と同様に無限遠方における特定の境界条件のもとで作用汎函数の極小値を与える解として，モノポール解（monopole solution）と呼ばれるものが考えられる（たとえばアティヤとヒッチンの著書 [3] を参照されたい）．ナームはモノポール解に対してインスタントン解の ADHM 構成法に相当する構成法を与えた [63]．このナーム構成法（Nahm construction）では ADHM 構成法の行列 $\Delta(x)$ に代わって空間座標 x_1, x_2, x_3 の 1 次式の行列を係数とする常微分演算子 $\partial_t + M_j x^j + N$ を用いる．コリガンとゴダードは ADHM 構成法とナーム構成法を相互性（reciprocity）という観点から統一的に説明した [17].

3. ヒッチンはミニツイスター空間（mini-twistor space）と呼ばれる 2 次元複素多様体（具体的には複素射影直線の正則接束 $T\mathbf{CP}^1$ の全空間）を用いてボゴモルニー方程式のツイスター的記述を与えた [37]．$T\mathbf{CP}^1$ の大域的正則断面すなわち $\mathbf{CP}^1$ 全体で定義された正則接ベクター場は $(z_0 + z_1\zeta + z_2\zeta^2)\partial/\partial\zeta$ と表せるが，ここに現れる係数 (z_0, z_1, z_2) が複素化された 3 次元空間の座標と解釈される．$T\mathbf{CP}^1$ の座標 (η, ζ)（接ベクター $\eta\partial/\partial\zeta$ に対応する）を用いれば，4 次元の場合の時空座標と非斉次ツイスター座標を結ぶ関係式 $w^0 = y - \zeta\bar{z}$, $w^1 = z + \zeta\bar{y}$ に相当するものは $\eta = z_0 + z_1\zeta + z_2\zeta^2$ となる．ヒッチンはこのような設定のもとで $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合のモノポール解がミニツイスター空間上の特別な性質をもつ正則線形束 [37] やスペクトル曲線（spectral curve）と呼ばれる代数曲線 [38] によって決まることを示している．

4. 場の方程式に時空的対称性の条件を課して低次元の方程式を導く手続きを一般に次元簡約（dimensional reduction）という．ボゴモルニー方程式は反自己双対方程式の 3 次元への簡約であるが，反自己双対方程式の次元簡約はそれだけにとどまらない．たとえば 2 次元への次元簡約として，2 次元時空の相対論的非線形場である主カイラル場（principal chiral field）の方程式やアインシュタイン方程式の定常軸対称解を特徴づけるエルンスト方程式（Ernst equation）などが得られる．ウォードはこれらの例を根拠として，各種の可積分系が反自己双対方程式の次元簡約として統一的に理解できるだろう，と予想した [100]．このことはその後さまざまな例について確かめられた．たとえばメイスンとスパーリングはボゴモルニー方程式の 2 次元への簡約から代表的なソリトン方程式である KdV 方程式（Korteweg-de Vries equation）や非線型シュレディン

ガー方程式（nonlinear Schrödinger equation）が導出できることを示し [59]，そのツイスター的解釈も与えた [60]．2 次元の方程式の 1 次元への次元簡約によってオイラー–アーノルド独楽（Euler-Arnold-Manakov top）など各種の有限自由度可積分系も得られる．さらにメイスンとウッドハウスは 4 次元から 1 次元への直接的次元簡約によって I 型から VI 型までの 6 種類のパンルベ方程式（Painlevé equation）がすべて導出できることを示した [61]．これらの次元簡約の詳細についてはメイスンとウッドハウスの著書 [62] を参照されたい．

5. 次元簡約とは逆に反自己双対方程式の高次元時空への一般化も知られている．その代表的な例は 4 次元複素時空 **CM** を一般次元の複素グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}(2, \boldsymbol{C}^{n+1})$ に置き換えた設定で得られる（$n = 3$ の場合が本来の 4 次元時空に相当する）．第 3 章で見たように，このグラスマン多様体の開集合 $U_{n-1,n}$ には $x^{a\dot{a}}$ （$a = 0, \ldots, n-2$, $\dot{a} = 0, 1$）という座標がある．この高次元時空上でゲージ場 $A_{a\dot{a}}$ と複素接続 $D = d + A$（$A = A_{a\dot{a}}dx^{a\dot{a}}$）を導入して
$$[D_{a\dot{0}} - \zeta D_{a\dot{1}},\, D_{b\dot{0}} - \zeta D_{b\dot{1}}] = 0 \quad (a, b = 0, \ldots, n-2)$$
という方程式が考えられる．これはウォード [99] が提案した高次元化の一つで，$\mathbf{CP}^n$ をツイスター空間として 4 次元の場合と同様のツイスター理論が展開できる．メイスンとスパーリング [59] はこの方程式を 2 次元に次元簡約してソリトン方程式の高次時間発展の階層（hierarchy）を導出している．

6. 反自己双対方程式に対してベラビンとザハロフ [9] が見出したことはただちに可積分系研究者の注意を引き，代数幾何学的特殊解の構成 [15, 52]，保存量や無限小対称性 [14, 20, 78], 分解問題に基づく対称性の記述 [93, 108], 無限次元グラスマン多様体による解の記述 [87], 各種の特殊解構成法の比較 [86] などの研究に発展した．なお，可積分系の理論全般については拙著 [117] やその中で紹介した参考文献を参照されたい．

7. 反自己双対方程式のツイスター理論が ADHM 構成法などの成果を上げて間もない頃，本来のヤン–ミルズ方程式をツイスター的に扱う試みも登場した [34, 45, 105]．これらはいずれもナル直線を用いてゲージ場をアンビツイスター空間（あるいはそれを含む $\mathbf{PT} \times \mathbf{PT}^*$）の言葉に翻訳することをめざしたものである．論文集 [55] にはこの当時の研究に関する記事がいくつか収録されている．

8. 最近ウィッテン（E. Witten）によってゲージ理論とツイスター理論の新たな関連が見出された [106]．これはゲージ理論のある種の散乱振幅の摂動論的計算をツイスター的に記述することから始まって，ツイスター空間 $\mathbf{CP}^3$ （正確に言えば，それにフェルミオン的な反可換量の座標を付け加えた超多様体 $\mathbf{CP}^{3|4}$）

を超弦理論の標的空間と見なし，最終的には散乱振幅の計算に超弦理論的解釈を与える，という大変豊かな内容をもつ試みである．この試みはツイスター弦理論（twistor string theory）と呼ばれ，活発な研究が続いている．

第6章
重力場のツイスター理論

アインシュタイン（A. Einstein）は相対論を平坦なミンコフスキー時空 M から曲がった時空 $\mathcal{M}$ に一般化すること（一般相対論）によって重力が自然に取り込まれることを見出した．曲がった時空を数学的に定式化するためにそこで採用されたのがリーマン（B. Riemann）の幾何学である．リーマン幾何学では定数と限らない成分 $g_{\mu\nu}$ をもつ計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ によって空間を規定する．それが時空の湾曲すなわち重力効果となって現れるので，計量は物理的には重力場と解釈される．この重力場を時空内の重力源（重力以外の場や物質）と関連づけるのがアインシュタインの与えた重力場の方程式（アインシュタイン方程式）である．

アインシュタイン方程式はヤン–ミルズ方程式と同様に（あるいはそれ以上に高度の）非線形性をもつ場の方程式である．重力源のない（すなわち真空中の）アインシュタイン方程式を弱重力極限 $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ で線形近似したものはスピン 2 の無質量粒子（重力子）の自由場方程式になる．それをマクスウェル方程式の場合と同様にスピナー形式に書き直して完全対称なスピナー場に分解すれば，無質量自由場のツイスター理論が適用できる．アインシュタイン方程式自体をこのように扱うことはできないが，ヤン–ミルズ方程式の場合と同様に「反自己双対条件」と呼ぶべき何らかの付加条件を加えればツイスター的取扱いが可能になるのではないか，と期待することは自然な発想であろう．

このプログラムは（実際にはゲージ場に関するアティヤとウォードの研究 [5, 95] に先行して）ペンローズ自身によって実行された [70]．ペンローズは真空中のアインシュタイン方程式にワイルの共形曲率 $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ の自己双対部分が消えるという条件を付加することによって重力場をツイスター的に取り扱うことに成功した．そこでは平坦時空のツイスター空間 $\mathbf{PT}'$ に代わって曲がった時空のツイスター空間 $\mathbf{P}\mathcal{T}$ が登場する．$\mathbf{P}\mathcal{T}$ は $\mathbf{PT}'$ の有するいくつかの性質・構造を継承した 3 次元複素多様体であり，その点は複素時空 $\mathbf{C}\mathcal{M}$ の中の全ナルな複素曲面（α 曲面）に対応する．逆に，時空

点は $\mathbf{P}\mathcal{T}$ の中の $\mathbf{CP}^1$ と正則同型な複素曲線（ツイスター曲線）に対応する．実際には，ペンローズが注意しているように，このようなツイスター空間を定義するためには $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ の自己双対部分が消えれば十分であり，アインシュタイン方程式自体は必要ではない．アインシュタイン方程式はツイスター空間の付加的性質・構造として組み込まれることになる．

このように，ゲージ場のツイスター理論の場合には個々のゲージ場が共通のツイスター空間上で定義されたそれぞれに固有の正則線形束に対応するのに対して，重力場の場合には個々の時空・計量がそれぞれに固有のツイスター空間に対応する．このツイスター空間を局所座標の変換函数によって具体的に記述しておけば，それをデータとしてもとの時空・計量（特にアインシュタイン方程式の解）が原理的に復元できることになる．ただし，この手続きを実際に実行することは一般に容易でない．

1 曲がった時空を記述する枠組み

この節では曲がった時空を記述する基本的な枠組みを紹介する．一般相対論（general relativity）の数学的枠組みはアインシュタインが採用したリーマン幾何学であるが，計量に関して正規直交系をなす1次微分形式の組を用いることによって，そこにカルタン（E. Cartan）の幾何学の考え方を導入することができる．以下では一般相対論や微分幾何学についての知識をある程度仮定して話を進める．必要な知識は参考文献 [111, 119, 120] などで補われたい．

1.1 一般相対論の時空

一般相対論では4次元時空を $(+---)$ 型の計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ をもつ擬リーマン多様体（pseudo-Riemannnian manifold） $\mathcal{M}$ として定式化する．計量が平坦でない（曲率がゼロでない）ような時空は「曲がっている（curved）」わけだが，この曲がり具合が重力に他ならない，というのが一般相対論の基本的な解釈である．この意味で計量の成分 $g_{\mu\nu}$ は重力場（gravitational field）を表す．

重力場の存在はたとえば質点の運動に反映される．質点自体が重力場に及ぼす影響を無視すれば，一般相対論における質点の運動の世界線は測地線の方程式

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{6.1}$$

に従う．ここで s は世界線の媒介変数であり，また $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は計量から定まるレビ・チビタ接続（Levi-Civita connection）∇ の接続係数，別名クリストッフェル記号（Christoffel symbol）である．この質点の運動法則は光子にも当てはまる．こうして一般相対論では光線（光子の世界線）も重力場の影響を受けて「曲がる」のである．

重力場自体はアインシュタイン方程式（Einstein equation）

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{6.2}$$

に従う（ただし，これまでと同様に光速 c を 1 に選んでいる）．ここで $G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンサー（Einstein tensor）と呼ばれるもので，リッチ曲率（Ricci curvature）の成分 $R_{\mu\nu}$ とスカラー曲率（scalar curvature）R によって

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu}$$

と表される量である[†1]．G は重力定数（gravitational constant）と呼ばれる定数である．$T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンサー（energy-momentum tensor）と呼ばれる量で，重力場以外の場や物質の寄与がこの中にまとめられている．特に真空中，すなわち重力場以外の場や物質が存在しない場合のアインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = 0$ はリッチ平坦性（Ricci flatness）の条件

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{6.3}$$

に同値である．

アインシュタイン方程式の右辺に宇宙定数（cosmologigal constant）と呼ば

[†1] $R_{\mu\nu}$ と R は計量 ds^2 のリーマン曲率の成分 $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ から縮約

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu\beta}g^{\alpha\beta}, \quad R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

によって得られる．ここで $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ を要素とする 4×4 行列の逆行列の (μ,ν) 要素を表す．ベクターやテンサーの添字の上げ下げは $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ を用いて

$$v_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu, \quad w^\mu = g^{\mu\nu}w_\nu, \quad \ldots$$

というように行う．

れる定数 Λ を含む項 $-\Lambda g_{\mu\nu}$ を付加したもの

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \tag{6.4}$$

を考えることもある．$T_{\mu\nu} = 0$ で宇宙定数を含む項のみを残した方程式 $G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4} g_{\mu\nu} \tag{6.5}$$

と同値である．この場合には R は定数であり，$\Lambda = R/4$ という関係が成立する．

一般相対論ではこのように曲がった時空を考えるので，共変性の意味も改めて考え直す必要がある．第一に,「一般相対性（general relativity）」は物理法則が時空の局所座標の選び方に依存しないことを要求する．そのために各種のテンサーやスピナーなどを用いて物理法則を書き下すことになる．前述の質点の運動方程式やアインシュタイン方程式はこの要請を満たしている．第二に,「局所ローレンツ変換」の概念は時空各点の接空間へのローレンツ群 $O(1,3)$ の作用として定式化し直されることになる．特殊相対論ではミンコフスキー時空の各点を中心とする座標変換として局所ローレンツ変換を定式化したが，それをそのまま曲がった時空に一般化するよりも，接空間におけるローレンツ群の作用と見なして一般化する方が数学的には扱いやすい．第三に，曲がった時空では平坦時空における「並進」の概念が失われる．並進の概念はエネルギーや運動量と密接に関連しているので，一般相対論の時空におけるエネルギー・運動量の取扱いは難しい問題を生じる[†2]．

局所ローレンツ変換を時空の接空間あるいは余接空間へのリー群作用として定式化し直すことによって，重力場を一種のゲージ理論として扱うことが可能になる．幾何学的に言えば，これはリーマンの幾何学の枠組みにカルタンの幾何学の考え方を持ち込むことに他ならない．カルタンの幾何学では多様体の各点で余接空間の基底を与えるような1次微分形式の組を用意する．それを動枠（moving frame）と呼ぶ．今の場合には計量に関して正規直交基底をなすよう

[†2] この問題はツイスター理論の観点からも関心を呼んだ．ハゲットとトッドの本 [42] や論文集 [6] に収録されたトッドの論文などを参照されたい．

な動枠すなわち

$$ds^2 = \eta_{jk}e^j e^k = (e^0)^2 - (e^1)^2 - (e^2)^2 - (e^3)^2 \tag{6.6}$$

という等式を満たす 1 次微分形式の組 $e^j = e^j_\mu dx^\mu$ （$j = 0, 1, 2, 3$）を用いる．正規直交動枠はもちろん一意的ではなく $O(1,3)$ 値函数 $h = (h^j{}_k(x))$ による変換

$$e^j \ \to \ h^j{}_k(x)e^k \tag{6.7}$$

の任意性がある．これが余接空間における局所ローレンツ変換である．e^j に対して接ベクターからなる双対動枠 $\partial_j = f^\mu_j \partial_\mu$ （$j = 0, 1, 2, 3,\ \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$）を

$$\langle e^j, \partial_k \rangle = \delta^j_k \tag{6.8}$$

という条件で定めれば（ここで δ^j_k は数値的には通常のクロネッカー記号 δ_{jk} と同じものであり，また $\langle \omega, v \rangle$ は微分形式 $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ と接ベクター $v = v^\mu \partial_\mu$ の自然なペアリング $\omega_\mu v^\mu$ を表す），接空間における局所ローレンツ変換は

$$\partial_j \ \to \ h_j{}^k(x)\partial_k \tag{6.9}$$

となる．ファイバー束の言葉を用いれば，正規直交動枠とは要するに $\mathcal{M}$ の各点に余接空間の正規直交基底の集合を置くことによって定まる $O(1,3)$ 主束の断面である．レビ・チビタ接続はこの主束上の接続として理解することもできる．物理的に見れば，これは計量の成分 $g_{\mu\nu}$ の代わりに正規直交動枠の成分 e^j_μ を基本的な場として扱うことを意味する．物理学では e^j_μ を四脚場（vierbein）と呼ぶ．

1.2　正規直交動枠によるレビ・チビタ接続の記述

正規直交動枠によるレビ・チビタ接続の記述は重力場に対する反自己双対方程式の類似を考える際の基礎にもなるので，少し立ち入って解説しておきたい．ただし，話を簡単にするために，これ以降は通常の一般相対論的設定を離れて $(++++)$ 型計量をもつ時空 $\mathcal{M}$ （あるいは複素計量をもつ複素時空 $\mathbf{C}\mathcal{M}$）を考える．この場合の正規直交動枠とは計量に対して

$$ds^2 = \delta_{jk}e^j e^k = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + (e^4)^2 \tag{6.10}$$

が成立するような1次微分形式の組 $e^j = e^j_\mu dx^\mu$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ を意味する．対応する双対動枠を $\partial_j = f^\mu_j \partial_\mu$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ と表す．これに伴って添字の上げ下げを

$$v_j = \delta_{jk} v^k, \quad w^j = \delta^{jk} w_k, \quad \ldots$$

というように行うものとする．

レビ・チビタ接続は $\mathcal{M}$ の接束 $T\mathcal{M}$ 上の接続 ∇（$\mathcal{M}$ 上の接ベクター場 X, Y に対して新たな接ベクター場 $\nabla_X(Y)$ を対応させる）で

1. ねじれがない： $T(X, Y) = 0$
2. 計量を不変に保つ： $\nabla_X(ds^2) = 0$

の二つの条件を満たすものとして一意的に定まる．これを双対動枠 ∂_j に関する接続係数 ${\Gamma^j}_{kl}$ の言葉に翻訳しよう．そのために必要となることを以下に列挙する．

i) 接続係数 ${\Gamma^j}_{kl}$ は

$$\nabla_{\partial_l}(\partial_k) = {\Gamma^j}_{kl} \partial_j \tag{6.11}$$

という等式で定義される．

ii) 余接束 $T^*\mathcal{M}$ 上の接続は任意の接ベクター場 X, Y と1次微分形式 θ に対して

$$\langle \nabla_X(\theta), Y \rangle + \langle \theta, \nabla_X(Y) \rangle = 0$$

という等式が成立するように定義される．結果として

$$\nabla_{\partial_l}(e^j) = -{\Gamma^j}_{kl} e^k \tag{6.12}$$

となることがわかる．

iii) ねじれ（torsion）は ${T^j}_{kl} \partial_j \otimes e^k \otimes e^l$ という型のテンサーで，2個の接ベクター場 X, Y に対して新たな接ベクター場 $T(X, Y)$ を対応させるものとして

$$T(X, Y) = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y] \tag{6.13}$$

と定義される．

これらを用いて $\Gamma^j{}_{kl}$ を定める関係式が得られる．まず，ねじれの定義式から $T(\partial_k, \partial_l) = T^j{}_{kl}\partial_j$ が

$$T(\partial_k, \partial_l) = (\Gamma^j{}_{lk} - \Gamma^j{}_{kl} - c^j{}_{kl})\partial_j$$

と表せることがわかる．ここで ∂_j の交換子係数 $c^j{}_{kl}$ を

$$[\partial_k, \partial_l] = c^j{}_{kl}\partial_j \tag{6.14}$$

という等式で定義した．したがってねじれなしの条件は

$$\Gamma^j{}_{kl} - \Gamma^j{}_{lk} + c^j{}_{kl} = 0 \tag{6.15}$$

という関係式に帰着する．また，∇_{∂_l} の e^j への作用の公式 (6.12) から

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_l}(ds^2) &= \delta_{jk}(\nabla_{\partial_l}(e^j)e^k + e^j\nabla_{\partial_l}(e^k)) \\ &= -\delta_{jk}\Gamma^j{}_{ml}e^m e^k - \delta_{jk}\Gamma^k{}_{ml}e^j e^m \\ &= -2\Gamma_{jkl}e^j e^k\end{aligned}$$

となることがわかるので，接続が計量を不変に保つという条件は

$$\Gamma_{jkl} + \Gamma_{kjl} = 0 \tag{6.16}$$

という関係式に帰着する．

(6.15) と (6.16) から $\Gamma^j{}_{kl}$ が決まる．それを見るには Γ_{jkl} の k, l に関する対称化と反対称化

$$\Gamma_{j(kl)} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jkl} + \Gamma_{jlk}), \quad \Gamma_{j[kl]} = \frac{1}{2}(\Gamma_{jkl} - \Gamma_{jlk})$$

を補助的に用いるのが便利である．(6.15) はただちに

$$\Gamma_{j[kl]} = -\frac{1}{2}c_{jkl} \tag{6.17}$$

と言い換えられる．他方 (6.16) とその添字を入れ替えて得られる等式

$$\Gamma_{jlk} + \Gamma_{ljk} = 0$$

を加えたものから (6.16) の添字を別のやり方で入れ替えた等式

$$\Gamma_{klj} + \Gamma_{lkj} = 0$$

を差し引けば，

$$\Gamma_{j(kl)} = -\Gamma_{k[jl]} - \Gamma_{l[jk]} \tag{6.18}$$

という等式が得られる．右辺に (6.17) を適用すれば，これも交換子係数によって表せることがわかる．もとの Γ_{jkl} はこれらの和 $\Gamma_{jkl} = \Gamma_{j(kl)} + \Gamma_{j[kl]}$ として復元されるので，最終的に

$$\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2}(c_{kjl} + c_{ljk} - c_{jkl}) \tag{6.19}$$

となることがわかる．

1.3　カルタンの構造方程式

正規直交動枠とその接続係数はカルタンの構造方程式（Cartan's structure equations）と呼ばれる 2 種類の方程式を満たす．

最初の構造方程式は e^j の外微分に関するものである．まず ∂_j の交換子係数 $c^j{}_{kl}$ を e^j の言葉に翻訳しておく．任意の 1 次微分形式 θ と接ベクター場 X, Y に対して成立する恒等式

$$d\theta(X,Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X,Y])$$

を思い出す．これを $\theta = e^j$, $X = \partial_k$, $Y = \partial_l$ に適用して交換子係数の定義 (6.14) と組み合わせれば

$$de^j = -\frac{1}{2}c^j{}_{kl}e^k \wedge e^l \tag{6.20}$$

という等式が得られる．

$$\Gamma^j{}_k = \Gamma^j{}_{kl}e^l \tag{6.21}$$

という微分形式を導入し，(6.17) に注意して (6.20) の右辺を書き直せば

$$de^j + \Gamma^j{}_k \wedge e^k = 0 \tag{6.22}$$

という等式が得られる．これがカルタンの第 1 構造方程式（first structure equation）である．

もう一つの構造方程式は ∇ の曲率すなわちリーマン曲率（Riemann curvature）に関するものである．リーマン曲率を $R^j{}_{klm}\partial_j \otimes e^k \otimes e^l \otimes e^m$ という

型のテンサーと見れば，3 個の接ベクター W, X, Y に対して新たな接ベクター $R(W, X, Y)$ を対応させるものとして

$$R(W,X,Y) = \nabla_X \nabla_Y(W) - \nabla_Y \nabla_X(W) - \nabla_{[X,Y]}(W) \tag{6.23}$$

と定義することができる．(6.11) と (6.14) を用いて $R(\partial_k, \partial_l, \partial_m) = R^j{}_{klm}\partial_j$ を計算すれば，係数が

$$R^j{}_{klm} = \partial_l \Gamma^j{}_{km} - \partial_m \Gamma^j{}_{kl} + \Gamma^j{}_{nl}\Gamma^n{}_{km} - \Gamma^j{}_{nm}\Gamma^n{}_{kl} - \frac{1}{2}\Gamma^j{}_{kn}c^n{}_{lm} \tag{6.24}$$

と表せることがわかる．$\Gamma^j{}_k$ の定義式を外微分したもの

$$d\Gamma^j{}_k = d\Gamma^j{}_{kl} \wedge e^l + \Gamma^j{}_{kl} de^l$$

に第 1 構造方程式を適用して書き直し，上の $R^j{}_{klm}$ の表示式と見比べれば，最終的に

$$d\Gamma^j{}_k + \Gamma^j{}_l \wedge \Gamma^l{}_k = \frac{1}{2}R^j{}_{klm}e^l \wedge e^m \tag{6.25}$$

という等式が得られる．これがカルタンの第 2 構造方程式（second structure equation）である．

2　スピナー接続と反自己双対方程式

正規直交動枠の複素線形結合としてナルな動枠を導入すれば，レビ・チビタ接続を二種類のスピナー束上の接続（スピナー接続）に分解することができる．スピナー接続の曲率はさらに基本的な量に分解される．この分解に基づいてさまざまな型の反自己双対方程式を考えることができる．

2.1　レビ・チビタ接続のスピナー接続への分解

ここまでの話は実際には任意次元の時空で通用する．この節では 4 次元時空に特有の状況を考える．4 次元時空では（必要ならば時空の部分領域に限定することによって[†3]）接束の複素化 $T^{\boldsymbol{C}}\mathcal{M} = \boldsymbol{C} \otimes T\mathcal{M}$（階数 4 の複素線形束と

[†3] 大域的に考えればここでスピン構造に関わる位相幾何学的な問題（たとえば参考文献 [119] を参照されたい）が生じる．

なる）を無点スピナー束 $\boldsymbol{S}_-$ と有点スピナー束 $\boldsymbol{S}_+$ のテンサー積と同一視すること

$$T^{\boldsymbol{C}}\mathcal{M} \simeq \boldsymbol{S}_- \otimes \boldsymbol{S}_+ \tag{6.26}$$

ができる．これを具体的に記述するために

$$(e^{a\dot{a}})_{a=0,1,;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^3 + ie^4 & -e^1 + ie^2 \\ e^1 + ie^2 & e^3 - ie^4 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

という正規直交動枠の複素線形結合 $e^{a\dot{a}}$ （$a = 0, 1,\ \dot{a} = \dot{0}, \dot{1}$）を導入する．計量はこれらを用いて

$$ds^2 = 2\det(e^{a\dot{a}}) = \epsilon_{a\dot{a}}\epsilon_{b\dot{b}}e^{a\dot{a}}e^{b\dot{b}} \tag{6.28}$$

と表せる．$e^{a\dot{a}}$ は計量に関してナルであることに注意されたい．このナルな動枠に対して接ベクター場の組 $\partial_{a\dot{a}}$（$a = 0, 1,\ \dot{a} = \dot{0}, \dot{1}$）を

$$(\partial_{a\dot{a}})_{a=0,1;\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \partial_3 - i\partial_4 & -\partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 - i\partial_2 & \partial_3 + i\partial_4 \end{pmatrix} \tag{6.29}$$

と定めれば $e^{a\dot{a}}$ に対して

$$\langle e^{a\dot{a}}, \partial_{b\dot{b}}\rangle = \delta^a_b\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \tag{6.30}$$

という関係を満たす双対動枠となる．任意の接ベクター場は混合スピナー $v^{a\dot{a}}$ を係数として $v^{a\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$ という形に表せるわけだが，これが前述の $T^{\boldsymbol{C}}\mathcal{M}$ と $\boldsymbol{S}_-\otimes\boldsymbol{S}_+$ の同型の意味することに他ならない．

$T^{\boldsymbol{C}}\mathcal{M}$ の $\boldsymbol{S}_\pm$ への分解はゲージ変換の構造にも反映される．計量が SU(2) 値の函数 $h = (h^a{}_b(x))$, $k = (k^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}(x))$ による $e^{a\dot{a}}$ の変換

$$e^{a\dot{a}} \ \to\ h^a{}_b(x)k^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}(x)e^{b\dot{b}} \tag{6.31}$$

のもとで不変であるということに注意されたい．これは SO(4) による正規直交動枠のゲージ変換（局所ローレンツ変換に対応する）が第 1 章で紹介した 2 重被覆 $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(4)$ によって $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(2)$ に関するゲージ変換に持ち上がることを意味している．ちなみに，実時空の代わりに複素時空を考える場合には SU(2) を $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ に置き換えればよい．

$e^{a\dot{a}}$ を動枠に選べば，それに対応するレビ・チビタ接続の接続係数 $\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}c\dot{c}}$ が定まる．具体的に言えば，接続係数は

$$\nabla_{\partial_{c\dot{c}}}(\partial_{b\dot{b}}) = \Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}c\dot{c}}\partial_{a\dot{a}}, \quad \nabla_{\partial_{c\dot{c}}}(e^{a\dot{a}}) = -\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}c\dot{c}}e^{b\dot{b}}$$

という等式を満たすものとして決まる．これらの接続係数を微分形式にまとめたもの

$$\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} = \Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}c\dot{c}}e^{c\dot{c}}$$

が $T^{\mathbf{C}}\mathcal{M}$ の $\boldsymbol{S}_{\pm}$ へのテンサー積分解に対応して二つの部分に分かれることを示そう．

その鍵は $\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}}$ の添字 $a, \dot{a}$ を下に降ろしたもの[†4]が (6.16) に由来する反対称性

$$\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}} + \Gamma_{b\dot{b}a\dot{a}} = 0 \tag{6.32}$$

をもつこと[†5]にある．第 1 章で電磁場の曲率 $F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ に対して行ったように，この反対称性によって $\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}}$ を

$$\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}} = \gamma_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}\gamma_{\dot{a}\dot{b}} \tag{6.33}$$

という形に表すことができる．ここで γ_{ab} と $\gamma_{\dot{a}\dot{b}}$ は

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}}, \quad \gamma_{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}}$$

というように定義される量であり，添字について対称性

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}, \quad \gamma_{\dot{a}\dot{b}} = \gamma_{\dot{b}\dot{a}} \tag{6.34}$$

をもつ．

ここで改めて $a, \dot{a}$ を上に上げれば $\Gamma_{a\dot{a}b\dot{b}}$ の分解表示から

$$\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} = \gamma^{a}{}_{b}\epsilon^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} + \epsilon^{a}{}_{b}\gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$$

[†4] スピナー添字の上げ下げはここでも $\phi^a = \epsilon^{ab}\phi_b$, $\phi_b = \phi^a\epsilon_{ab}$ という規則に従って行う．

[†5] $e^{a\dot{a}}$ は正規直交動枠ではないが正規直交動枠 e^j と定数係数の線形変換で結ばれるので，$\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}}$ は $\Gamma^j{}_k$ をこれらの係数によって多重線形的に変換したものに一致する．それゆえ (6.16) から上の反対称性が従う．

という等式が得られる．$\epsilon^a{}_b = -\delta^a_b$, $\epsilon^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = -\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}}$ であることに注意すれば，この等式は $\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}}$ を並べた 4×4 行列が 2×2 行列

$$\gamma_- = (\gamma^a{}_b)_{a,b=0,1}, \quad \gamma_+ = (\gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}})_{\dot{a},\dot{b}=\dot{0},\dot{1}} \tag{6.35}$$

を用いて

$$(\Gamma^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}})_{a,b=0,1;\,\dot{a},\dot{b}=\dot{0},\dot{1}} = -\gamma_- \otimes I - I \otimes \gamma_+ \tag{6.36}$$

と表せることを示している．これはレビ・チビタ接続が接束のテンサー積分解 $\boldsymbol{T^C}\mathcal{M} \simeq \boldsymbol{S}_- \otimes \boldsymbol{S}_+$ に対応して $\boldsymbol{S}_\pm$ 上のスピナー接続（spinor connection）

$$\nabla_\pm = d + \gamma_\pm \tag{6.37}$$

に分解されたことを意味する．これに伴ってカルタンの第1構造方程式は

$$de^{a\dot{a}} = \gamma^a{}_b \wedge e^{b\dot{a}} + \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \wedge e^{a\dot{b}} \tag{6.38}$$

という形に書き直せる．

2.2 さまざまな反自己双対条件

リーマン曲率の成分をスピナー形式で表せば $R^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}c\dot{c}d\dot{d}}$ という型の混合スピナーになる．詳細は参考文献 [75, 76, 111] に譲るが，スピナー形式で表した電磁場の曲率 $F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ を2個の対称スピナー $\phi_{ab}, \psi_{\dot{a}\dot{b}}$ に分解したように，$R_{a\dot{a}b\dot{b}c\dot{c}d\dot{d}}$ を

$$\begin{aligned} R_{a\dot{a}b\dot{b}c\dot{c}d\dot{d}} = {} & \Psi_{abcd}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} + \epsilon_{ab}\epsilon_{cd}\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} + \epsilon_{cd}\Phi_{ab\dot{c}\dot{d}}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}\Phi_{cd\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} \\ & + \frac{R}{24}(\epsilon_{ac}\epsilon_{bd} + \epsilon_{ad}\epsilon_{bc})\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\epsilon_{\dot{c}\dot{d}} + \frac{R}{24}\epsilon_{ab}\epsilon_{cd}(\epsilon_{\dot{a}\dot{c}}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}} + \epsilon_{\dot{a}\dot{d}}\epsilon_{\dot{b}\dot{c}}) \end{aligned} \tag{6.39}$$

と分解することができる．ここで $\Psi_{abcd}, \Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}}$ は添字に関して完全対称で，ワイルの共形曲率（conformal curvature）[†6] $C_{\kappa\lambda\mu\nu}$ の反自己双対部分と自己双対部分に対応する．また $\Phi_{ab\dot{a}\dot{b}}$ は同種添字について対称で，トレースなしのリッ

[†6] 共形曲率は計量の共形変換について不変であり，それが消える計量は共形的に平坦（conformally flat）すなわち平坦な計量を共形変換したものになる，ということが知られている．

チ曲率（trace-free Ricci curvature）$R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/4$ に対応する．

リーマン曲率の分解表示はスピナー接続 $\nabla_\pm$ の曲率

$$R^a{}_b = d\gamma^a{}_b + \gamma^a{}_c \wedge \gamma^c{}_b, \quad R^{\dot a}{}_{\dot b} = d\gamma^{\dot a}{}_{\dot b} + \gamma^{\dot a}{}_{\dot c} \wedge \gamma^{\dot c}{}_{\dot c} \tag{6.40}$$

の言葉にも翻訳できる．リーマン曲率とスピナー接続の曲率は

$$\frac{1}{2}R_{a\dot a b\dot b c\dot c d\dot d}e^{c\dot c} \wedge e^{d\dot d} = R_{ab}\epsilon_{\dot a\dot b} + \epsilon_{ab}R_{\dot a\dot b} \tag{6.41}$$

という関係にある．このことからスピナー接続の曲率が

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \Psi_{abcd}S^{cd} + \Phi_{ab\dot a\dot b}S^{\dot a\dot b} + \frac{R}{12}S_{ab}, \\ R_{\dot a\dot b} &= \Psi_{\dot a\dot b\dot c\dot d}S^{\dot a\dot b} + \Phi_{ab\dot a\dot b}S^{ab} + \frac{R}{12}S_{\dot a\dot b} \end{aligned} \tag{6.42}$$

と表せることがわかる．ここで $S^{ab}, S^{\dot a\dot b}$ は

$$S^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot a\dot b}e^{a\dot a} \wedge e^{b\dot b}, \quad S^{\dot a\dot b} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}e^{a\dot a} \wedge e^{b\dot b}$$

定義される反自己双対形式・自己双対形式である．

プレバンスキーは以上のような曲率の分解表示に基づいて右平坦性の条件

$$R_+ = (R^{\dot a}{}_{\dot b})_{\dot a,\dot b=\dot 0,\dot 1} = 0 \tag{6.43}$$

を重力場に対する反自己双対方程式の類似として考察し，それが1個のポテンシャル函数に対する単独非線形微分方程式に帰着することを示した [77]．以下ではそのような計量をもつ時空を右平坦時空（right-flat spacetime）と呼ぶことにしよう．$R_{\dot a\dot b}$ に対する分解表示からこの方程式は

$$\Psi_{\dot a\dot b\dot c\dot d} = 0, \quad \Phi_{ab\dot a\dot b} = 0, \quad R = 0 \tag{6.44}$$

と同値であり，真空中のアインシュタイン方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ に共形曲率の反自己双対性の条件を付加したものであることがわかる．その意味で (6.43) を満たす計量は反自己双対真空アインシュタイン計量（anti-self-dual vacuum Einstein metric）とも呼ばれる．

ちなみに，このような計量をもつ時空は天界（heaven）あるいは $\mathcal{H}$ 空間（$\mathcal{H}$-space）と呼ばれることもある．プレバンスキーは (6.43) を書き直して得られた単独非線形微分方程式を天界方程式（heavenly equation）と名づけた．ニュー

マンは無限遠方の漸近的平坦性の条件のもとでこの型の時空を考察し，計量に対して一種の周回積分表示を与えた [64, 50].

ペンローズが曲がった時空のツイスター理論として扱ったのはこのような右平坦時空であるが [70]，同時に，ツイスター空間を導入して時空との幾何学的対応を定義するには

$$\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0 \tag{6.45}$$

という条件（すなわち共形曲率が反自己双対であること）が満たされれば十分である，ということも注意している．そのような時空は共形的反自己双対 (conformally anti-self-dual) であるという[†7]．そこではリッチ曲率が消えることはむしろ付加条件として扱われ，最終的にはツイスター空間の付加的性質・構造に翻訳される．この意味では $\Phi_{ab\dot{a}\dot{b}}$ と R の一方のみが消えるような設定も可能である．実際，ウォードはペンローズにならって $\Phi_{ab\dot{a}\dot{b}}$ のみが消える場合のツイスター空間の特徴を明らかにしている [97]．その場合も含めて，共形的反自己双対時空のツイスター理論は次の4種類の時空族[†8] に大別して扱われることが多い

1. 共形的反自己双対（CASD）：$\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$
2. 反自己双対アインシュタイン（ASDE）：$\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$, $\Phi_{ab\dot{a}\dot{b}} = 0$
3. 反自己双対スカラー平坦（ASDSF）：$\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$, $R = 0$
4. 反自己双対真空アインシュタイン（ASDVE）：$\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$, $\Phi_{ab\dot{a}\dot{b}} = 0$, $R = 0$

このように，ゲージ場の場合と違って，重力場の場合には反自己双対方程式の類似としてさまざまなものが考えられる．反自己双対スカラー平坦計量や一般の共形的反自己双対計量はアインシュタイン方程式の解とは限らないので，物理的な観点から見れば，これらの計量を単なる重力場と解釈することは適切でないとも言える．実際，反自己双対スカラー平坦計量の特別な場合は重力場と電磁場の結合した系を記述するものと解釈できることが知られている [26].

[†7] 共形的反自己双対性の条件は計量の共形変換によって保たれるので，計量そのものよりもその共形類（すなわち共形構造）に対する条件と見なすのが自然である．

[†8] 各略号の意味は以下のとおり：CASD = conformally anti-self-dual, ASDE = anti-self-dual Einstein, ASDSF = anti-self-dual scalar-flat, ASDVE = anti-self-dual vacuum Einstein.

3　共形的反自己双対時空のツイスター的記述

これ以降はペンローズに従って複素計量（すなわち正則接束上の非退化正則2次形式）ds^2 をもつ複素時空 $\mathcal{X} = \mathbf{C}\mathcal{M}$ を考察の対象とする．共形的反自己双対性などの概念は実座標を複素座標に読み替えることによって複素時空に焼き直される．

ペンローズは共形的反自己双対性の条件下で $\mathcal{X}$ 内の全ナルな複素曲面（α 曲面）全体の集合としてツイスター空間 $\mathcal{Z} = \mathbf{P}\mathcal{T}$ を定義したが，$\mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbf{CP}^1$ の上の全微分方程式系を経由してツイスター空間を定義し直すこともできる．ツイスター空間には $\mathbf{CP}^1$ と正則同型な複素曲線（ツイスター曲線）の4パラメータ変形族が含まれており，そのパラメータ空間として時空 $\mathcal{X}$ が復元（あるいは生成）される．

3.1　共形的反自己双対時空のツイスター空間

複素時空 $\mathcal{X}$ の α 曲面（α-surface）とは次のような意味で全ナルな2次元複素部分多様体 α のことである：

1. 各点 $x \in \alpha$ の接空間 $T_x\alpha$ はある $\lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}}) \in \boldsymbol{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ によって

$$\begin{aligned} T_x\alpha &= \{v \in T_x\mathcal{X} \mid \langle e^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}},\, v\rangle = 0\} \\ &= \{v \in T_x\mathcal{X} \mid v^{a\dot{a}} = \kappa^a\lambda^{\dot{a}},\ \kappa = (\kappa^0, \kappa^1) \in \boldsymbol{C}^2\} \end{aligned} \tag{6.46}$$

と表せる（図6.1）．

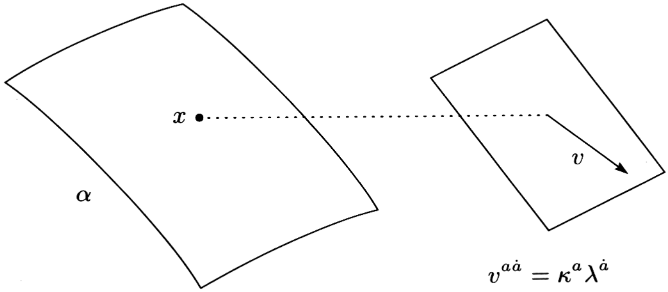


図 6.1　α 曲面とその各点の接空間

2. 上の条件に現れた λ は一般には $x \in \alpha$ に依存して変化し，スピナー接続 ∇_+ に関する無剪断条件

$$\lambda^{\dot{a}}\lambda^{\dot{b}}\nabla_{+b\dot{b}}\lambda_{\dot{a}} = 0 \tag{6.47}$$

に従う（ここで $\nabla_{+a\dot{a}} = \nabla_{+\partial_{a\dot{a}}}$）．

ペンローズは共形的反自己双対条件 $\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$ が満たされれば $\mathcal{X}$ がこのような α 曲面の複素3パラメータ族で埋め尽くされる（そのうち任意に与えられた時空点 x を通るものは複素1パラメータ部分族をなす）ということを注意し，これらの α 曲面の集合（あるいはそのパラメータ空間）としてツイスター空間 $\mathcal{Z}$ を定義した [70]（ただし，非ハウスドルフ性などの問題が生じる場合には $\mathcal{X}$ を適当な開部分集合に置き換えて議論を進めるものとする）．

ツイスター空間をこのように定義することは実際にはやや不便なので，ここではボイヤー [10] に従って少し異なる構成法（実時空に対してアティヤらが与えたツイスター空間の構成法 [4] を複素時空に焼き直したもの）を採用する．この構成法では平坦時空の場合の $\boldsymbol{F}' \subset \mathrm{Fl}(1,2,\boldsymbol{T})$ に相当するものとして $\mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbf{CP}^1$ を導入し，$\lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}})$ を $\mathbf{CP}^1$ の斉次座標として $\mathcal{F}$ 上の全微分方程式系

$$e^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0, \quad d\lambda^{\dot{a}} + \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\lambda^{\dot{b}} = 0 \tag{6.48}$$

を考える．$\lambda_{\dot{0}} \neq 0$ の部分に限れば，非斉次座標 $\zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$ を用いてこの全微分方程式系を

$$e^{0\dot{0}} + e^{0\dot{1}}\zeta = 0, \quad e^{1\dot{1}} + e^{1\dot{1}}\zeta = 0, \quad d\zeta = \theta \tag{6.49}$$

という形に書き直すこともできる．ここで θ は

$$\theta = -\lambda_{\dot{0}}^{-2}\lambda_{\dot{a}}\gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\lambda^{\dot{b}} = \gamma_{\dot{0}\dot{0}}\zeta^2 - 2\gamma_{\dot{0}\dot{1}}\zeta + \gamma_{\dot{1}\dot{1}}$$

という1次微分形式である．

この全微分方程式系の可積分性（integrability）すなわち $\mathcal{F}$ の各点においてそれを通る極大次元（今の場合には2次元）の積分多様体（integral manifold）

が存在するための条件はフロベニウスの定理[†9]によって

$$d(e^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}) \equiv 0, \quad d(d\lambda^{\dot{a}} + \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\lambda^{\dot{b}}) \equiv 0 \tag{6.50}$$

となる．ここで「$\equiv 0$」はもとの方程式 (6.48) を用いて左辺を計算したものが消えることを意味する．これらの可積分条件の方程式のうち前者は $e^{a\dot{a}}$ に対する第 1 構造方程式によって自動的に満たされれる．後者は

$$R^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\lambda^{\dot{b}} \equiv 0$$

と書き直せるが，$e^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} = 0$ から

$$S^{ab} = 0, \quad S^{\dot{0}\dot{0}} = \zeta^2 S^{\dot{1}\dot{1}}, \quad S^{\dot{0}\dot{1}} = S^{\dot{1}\dot{0}} = -\zeta S^{\dot{1}\dot{1}}$$

という等式が従うので，左辺は

$$R^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\lambda^{\dot{b}} = \lambda_{\dot{0}}^2(\Psi^{\dot{a}}{}_{\dot{b}\dot{0}\dot{0}}\zeta^2 - 2\Psi^{\dot{a}}{}_{\dot{b}\dot{0}\dot{1}}\zeta + \Psi^{\dot{a}}{}_{\dot{b}\dot{1}\dot{1}})S^{\dot{1}\dot{1}}$$

と書き直せる．したがってこれもペンローズの場合と同様に共形的反自己双対条件 $\Psi_{\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}} = 0$ に帰着する．こうして全微分方程式系 (6.48) は共形的反自己双対時空に対してフロベニウスの意味で可積分であるということがわかる．

この可積分条件のもとで $\mathcal{F}$ 上には (6.48) の積分多様体による葉層構造が定まる（図 6.2）．必要ならば（非ハウスドルフ性などの問題を避けるために）$\mathcal{X}$ を縮めることによって，これらの積分多様体の集合 $\mathcal{Z}$ は 3 次元複素多様体となる．これを $\mathcal{X}$ に対するツイスター空間 $\mathbf{P}\mathcal{T}$ と見なす．以上の構成から自然な射影 $p_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{Z}$, $p_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{X}$ が決まり，クライン対応の類似物

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbf{CP}^1 & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ \mathcal{X} = \mathbf{C}\mathcal{M} & & \mathcal{Z} = \mathbf{P}\mathcal{T} \end{array}$$

[†9] 一般に，各点で線形独立な 1 次微分形式の組 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ によって定義される全微分方程式系 $\omega_1 = \cdots = \omega_m = 0$ の可積分条件は各微分形式の外微分が適当な微分形式 $\theta_j{}^k$ によって $d\omega_j = \theta_j{}^k \wedge \omega_k$ と表せること（言い換えれば $d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m = 0$）である．詳細は参考文献 [120] を参照されたい．

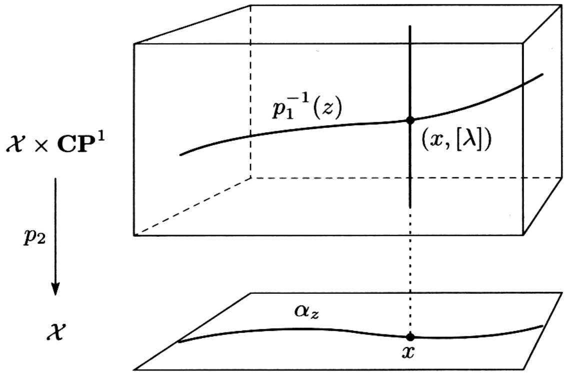


図 6.2 $\mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbf{CP}^1$ 上の全微分方程式系の積分多様体

が得られる．このとき $\mathcal{Z}$ の各点 z に対して

$$\alpha_z = p_2(p_1^{-1}(z)) \tag{6.51}$$

は前述の意味での α 曲面になる．他方，$\mathcal{X}$ の各点 x に対して

$$\Gamma_x = p_1(p_2^{-1}(x)) \tag{6.52}$$

は $\mathbf{CP}^1$ と正則同型な複素曲線であり，平坦時空の場合にならってツイスター曲線（twistor curve）と呼ばれる．

詳細は省くが（たとえば参考文献 [61, 102] を参照されたい），ツイスター曲線 Γ_x の $\mathcal{Z}$ における法束（normal bundle）[†10]については

$$N_{\Gamma_x}\mathcal{Z} \simeq H \oplus H \tag{6.53}$$

という同型がある．ここで $\mathbf{CP}^1$ 上の局所自由層 $\mathcal{O}(1)$ に対応する正則直線束 H を正則同型 $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ によって Γ_x 上に引き戻したものを同じ記号 H で表した．ツイスター曲線のもつこの性質はツイスター空間から時空を復元・生成する際の鍵となる．

[†10] 一般に，多様体 X の部分多様体 Y に対して Y の各点 y に商線形空間 T_yX/T_yY を対応させることによって Y 上に決まる線形束を Y の法束と呼び，N_YX という記号で表す．

3.2　共形的反自己双対時空の復元・生成

第2章で触れたように，平坦時空とその上の諸構造（特に共形構造）はツイスター直線の言葉で記述できる．ペンローズはこれをそのまま一般化した幾何学的な手続きによって，もとの時空とその上の共形構造をツイスター空間から復元している [70]．ペンローズが複素多様体の変形に関する小平（K. Kodaira）とスペンサー（D.C. Spencer）の研究（小平–スペンサー理論）に基づいて注意しているように，この手続きは実際には平坦時空のツイスター空間 $\mathbf{PT}'$ †11の任意の微小変形に対して通用するものであり，その意味で時空の「復元」というよりもむしろ「生成」と呼ぶ方がふさわしい．

この手続きにおいて時空はツイスター空間 $\mathcal{Z}$ 内の特別な条件を満たす複素曲線のパラメータ空間

$$\mathcal{X} \simeq \{\Gamma \subset \mathcal{Z} \mid \Gamma \simeq \mathbf{CP}^1,\ N_\Gamma \mathcal{Z} \simeq H \oplus H\} \tag{6.54}$$

として与えられる（ここでも $\mathbf{CP}^1$ 上の正則直線束 H を Γ に引き戻したものを同じ記号 H で表している）．複素部分多様体の変形に関する小平の結果 [51] によれば，このような複素曲線 Γ の $\mathcal{Z}$ 内の変形の障害 $H^1(\Gamma, \mathcal{O}(N_\Gamma \mathcal{Z}))$ は $H^1(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(1)) = 0$ によって消えて，無限小変形の集合は $H^0(\Gamma, \mathcal{O}(N_\Gamma \mathcal{Z}))$ と同一視できる．$\mathcal{X}$ の点 x に対応する複素曲線を Γ_x と表せば，正則同型 $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ によって接空間 $T_x\mathcal{X}$ と $\boldsymbol{C}^4$ との同型

$$T_x\mathcal{X} \simeq H^0(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)) \simeq \boldsymbol{C}^4 \tag{6.55}$$

が決まる．

$\mathcal{X}$ 上の共形構造は「$\mathcal{X}$ の2点 x, x' がナル分離される（null separated）†12のは $\Gamma_x \cap \Gamma'_x \neq \emptyset$ のときである」と宣言することによって定義される（図6.3）．これを接空間 $T_x\mathcal{X}$ の言葉に翻訳すれば，$v \in T_x\mathcal{X}$ がナルであるための必要十分条件は v に対応する $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ の大域的断面が零点をもつことである．

---

†11 $\mathbf{PT}$ ではなくて $\mathbf{PT}'$ を考えるのは，$\mathbf{PT}$ の複素多様体としての変形が自明なものしかないからである．

†12 本来は x, x' がナルな測地線によって結ばれることを意味するが，ここではまだ測地線の概念が定義されていないことに注意されたい．

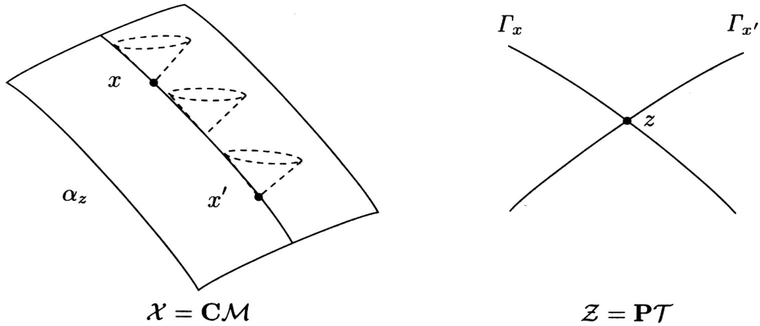


図 6.3 $\mathcal{X}$ 上の共形構造と α 曲面

$\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ の大域的断面は λ の斉次 1 次式 $v^a(\lambda) = v^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}$ $(a = 0, 1)$ の組 $(v^0(\lambda), v^1(\lambda))$ と解釈できる．その零点は $v^0(\lambda), v^1(\lambda)$ の共通零点であり，共通零点が存在するのは

$$\det(v^{a\dot{a}})_{a=0,1;\,\dot{a}=\dot{0},\dot{1}} = 0 \tag{6.56}$$

という等式が成立するときである．$v^{a\dot{a}}$ は接空間 $T_x\mathcal{X}$ の座標と見なせるので，上の条件によって確かに接空間に（複素）光円錐が定まることがわかる．こうして $\mathcal{X}$ に共形構造が定義される．

この共形構造の定義から $\mathcal{Z}$ の各点 z に対して

$$\alpha_z = \{x \in \mathcal{X} \mid z \in \Gamma_x\} \tag{6.57}$$

が $\mathcal{X}$ 内の全ナルな複素曲面となることもわかる（図 6.3）．これらの α 曲面族が存在することから $\mathcal{X}$ が共形的反自己双対時空であることが結論される（詳細はペンローズの原論文 [70] や参考文献 [42, 62, 102] を参照されたい）．

4　右平坦時空のツイスター的記述

右平坦時空（前節と同様にここでも複素時空を考える）のツイスター空間は $\mathbf{CP}^1$ への射影 $\pi : \mathcal{Z} \to \mathbf{CP}^1$ をもち，その各ファイバー $\pi^{-1}([\lambda])$ の上に複素シンプレクティック構造が決まる，という特徴をもつ．逆に，このような付加的構造をもつツイスター空間から右平坦時空が復元・生成できる．ペンローズは

間接的でかなり込み入った手順によってこの対応を説明しているが，ギンディキンに従ってある閉 2 次微分形式を導入すればより明快な説明が可能になる．

4.1　右平坦時空のツイスター空間

共形的反自己双対時空の特別な場合として右平坦時空にもツイスター空間 $\mathcal{Z}$ が決まる．ペンローズが示したように [70]，右平坦時空のリッチ平坦性は $\mathcal{Z}$ の付加的性質・構造に翻訳できる．ただし，実際にペンローズが行っているのは，$\mathcal{Z}$ を $\mathbf{PT}'$ の変形と見なして，そこから右平坦時空を導出するために $\mathbf{PT}'$ のどの性質・構造を残せばよいかを考える，というやや間接的な議論である．以下ではギンディキンの方法 [28]（論文集 [19] 所収の解説も参照されたい）にならって演繹的に右平坦時空のツイスター空間の特徴を説明する．ギンディキンの方法はプレバンスキーによる右平坦時空の記述 [77] を自然な形で発展させたものと見ることができる．

ギンディキンの方法の鍵は自己双対な微分形式の基底 $S^{\dot{a}\dot{b}}$ を $\mathbf{CP}^1$ の斉次座標 $\lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}})$ の 2 次形式としてまとめたもの

$$\Sigma(\lambda) = S^{\dot{a}\dot{b}}\lambda_{\dot{a}}\lambda_{\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}(e^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}) \wedge (e^{b\dot{b}}\lambda_{\dot{b}}) \tag{6.58}$$

あるいはそれに $\lambda_{\dot{0}}^{-2}$ を乗じて非斉次座標 $\zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$ の 2 次式にしたもの

$$\sigma(\zeta) = (e^{0\dot{0}} + e^{0\dot{1}}\zeta) \wedge (e^{1\dot{0}} + e^{1\dot{1}}\zeta) \tag{6.59}$$

を用いることにある．右平坦性条件 $R_+ = 0$ のもとではスピナー束 $\boldsymbol{S}_+$ 上の $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ ゲージ変換（これは $e^{a\dot{a}}$ の右ゲージ変換 $e^{a\dot{a}} \to k^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}e^{a\dot{b}}$ に対応する）によって ∇_+ の接続係数を

$$\gamma_+ = 0 \tag{6.60}$$

と選ぶことができる．他方，第 1 構造方程式と $\gamma_{ab}, \gamma_{\dot{a}\dot{b}}$ の添字に関する対称性から，一般に

$$dS^{\dot{a}\dot{b}} = \gamma^{\dot{a}}{}_{\dot{c}}S^{\dot{c}\dot{b}} + \gamma^{\dot{b}}{}_{\dot{c}}S^{\dot{a}\dot{c}}$$

という等式が成立することがわかる．したがって上のようにゲージを選べば

$$dS^{\dot{a}\dot{b}} = 0 \tag{6.61}$$

すなわち $S^{\dot{a}\dot{b}}$ は閉微分形式となる．プレバンスキーはこのことに基づいて天界方程式による右平坦時空を記述したが，ギンディキンはそれを一歩進めて，$S^{\dot{a}\dot{b}}$ を1個の微分形式 $\Sigma(\lambda)$ にまとめることによってツイスター空間との関係が見えてくる，ということを指摘したのである．

ツイスター空間の付加的性質・構造は以下のようにして導出できる．

1. ツイスター空間を定義する全微分方程式 (6.48) のうち $d\lambda^{\dot{a}}$ を含む方程式は前述の $\gamma_+ = 0$ のゲージのもとで $d\lambda^{\dot{a}} = 0$ という形に簡単化する．これは (6.48) の積分多様体（すなわち p_1 のファイバー）の上で $\lambda = (\lambda_{\dot{0}}, \lambda_{\dot{1}})$ が一定値を取ることを意味する．積分多様体の各点にこの λ が定める $\mathbf{CP}^1$ の点 $[\lambda]$ を対応させることによって写像 $\pi : \mathcal{Z} \to \mathbf{CP}^1$ が定まる．これは極大階数の写像であり，それによって $\mathcal{Z}$ は $\mathbf{CP}^1$ 上の2次元ファイバーをもつファイバー空間となる．他方，$\mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbf{CP}^1$ には元来 $\mathbf{CP}^1$ への射影 $\pi' : \mathcal{F} \to \mathbf{CP}^1$ がある．これらの射影の間には
$$\pi' = \pi \circ p_1 \tag{6.62}$$
という関係が成立し，p_1 は $\boldsymbol{CP}^1$ 上のファイバー空間の間の写像と見なせる．

2. $S^{\dot{a}\dot{b}}$ （$\dot{a}, \dot{b} = \dot{0}, \dot{1}$）がいずれも閉微分形式であることは1個の等式
$$\hat{d}\Sigma(\lambda) = 0 \tag{6.63}$$
にまとめられる．ここで $\hat{d}$ は λ を定数と見なして外微分すること（言い換えれば $\pi' : \mathcal{F} \to \mathbf{CP}^1$ に関する相対外微分）を表す．

3. 接ベクター場の組 $\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}$ （$a = 0, 1$）は (6.48) の積分多様体の各点の接空間の基底を与えるが，$\Sigma(\lambda)$ の定義から
$$\iota_{\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}}\Sigma(\lambda) = 0 \tag{6.64}$$
という等式が成立することがただちにわかる．ここで ι_X は接ベクター場 X による微分形式の縮約演算子を表す．この等式は $\Sigma(\lambda)$ が $\mathcal{Z}$ 上のある微分形式 Σ を p_1 によって $\mathcal{F}$ に引き戻して適当な函数 f を乗じたもの $fp_1^*\Sigma$ に等しいことを意味する．

4. 接ベクター場 X に沿うリー微分演算子 $\mathcal{L}_X$ の微分形式への作用については

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega) + \iota_X(d\omega)$$

という公式がある．これを π' のファイバーに接する接ベクター場と π' に関する相対微分形式に焼き直せば，d を $\hat{d}$ に置き換えた形の公式が得られる．それを (6.63), (6.64) と組み合わせれば，$\mathcal{L}_{\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}}\Sigma(\lambda)$ が π' に関する相対微分形式の意味で消えること

$$\mathcal{L}_{\lambda^{\dot{a}}\partial_{a\dot{a}}}\Sigma(\lambda) = 0 \mod d\lambda^{\dot{0}}, d\lambda^{\dot{1}} \tag{6.65}$$

がわかる．これは $\Sigma(\lambda)$ が p_1 のファイバーに沿って一定であることを意味する．

5. 以上のことから $\Sigma(\lambda)$ を π' に関する相対微分形式と見なしたものが $\mathcal{Z}$ 上のある相対微分形式 Σ の引き戻しに等しいこと

$$\Sigma(\lambda) = p_1^*\Sigma \mod d\lambda^{\dot{0}}, d\lambda^{\dot{1}} \tag{6.66}$$

がわかる．ところで，$\Sigma(\lambda)$ は λ の 2 次形式であるから，$\mathcal{F}$ 上の普通の意味の微分形式ではなくて $\pi'^*H^{\otimes 2}$ 係数の微分形式である．それに対応して Σ も $\pi^*H^{\otimes 2}$ 係数の相対微分形式（すなわち $\Omega_\pi^2(\pi^*H^{\otimes 2})$ の断面）である．

6. π の各ファイバー $\pi^{-1}([\lambda])$ は 2 次元であるから，Σ をそれらのファイバー上に制限したものは閉微分形式である．また，$\pi'^{-1}([\lambda])$ 上で $\Sigma(\lambda)$ が消える点は存在しないので，$\pi^{-1}([\lambda])$ 上で Σ が消える点も存在しない．したがって，Σ は $\pi^{-1}([\lambda])$ 上に複素シンプレクティック構造を定める．

要するに，ツイスター空間 $\mathcal{Z}$ は射影 $\pi : \mathcal{Z} \to \mathbf{CP}^1$ によるファイバー空間の構造と各ファイバー上に複素シンプレクティック構造を定めるような $\pi^*H^{\otimes 2}$ 係数の相対微分形式 $\Sigma \in \Gamma(\mathcal{Z}, \Omega_\pi^2(\pi^*H^{\otimes 2}))$ をもつ，ということがわかった．

4.2 右平坦時空の復元・生成

前述のような付加的構造（すなわち射影 $\pi : \mathcal{Z} \to \mathbf{CP}^1$ ならびに $\pi^*H^{\otimes 2}$ 係数の 2 次相対微分形式 Σ）をもつツイスター空間から逆に右平坦時空が復元・

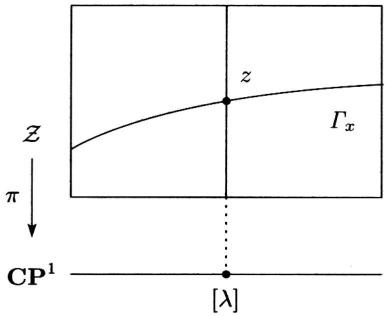


図 6.4 $\pi : \mathcal{Z} \to \mathbf{CP}^1$ の断面としてのツイスター曲線

生成できることを示そう．ここでもギンディキンの閉2次形式を用いて見通しのよい説明を与えることができる．

まず時空点に対応するツイスター曲線を求めるわけであるが，今の場合にはツイスター曲線 Γ として射影 π の制限 $\pi|_\Gamma : \Gamma \to \mathbf{CP}^1$ が $\mathbf{CP}^1$ との正則同型を与えるような複素曲線 Γ （言い換えれば射影 π の正則断面）を考えれば十分である（図6.4）．そのようなツイスター曲線（もちろん法束に関する条件 $N_\Gamma \mathcal{Z} \simeq H \oplus H$ も満たさなければならない）の4パラメータ変形族 $\{\Gamma_x\}_{x\in\mathcal{X}}$ が得られたとする．そのパラメータ空間 $\mathcal{X}$ が時空多様体となる．$\mathcal{F} = \mathcal{X} \times \mathbf{CP}^1$ から $\mathcal{Z}$ への射影 p_1 は $(x, [\lambda]) \in \mathcal{F}$ に対して Γ_x と $\pi^{-1}([\lambda])$ の交点 $z \in \mathcal{Z}$ を対応させるもの

$$p_1(x, [\lambda]) = z \tag{6.67}$$

として定義される（図6.4参照）．

$\Sigma(\lambda)$ を

$$\Sigma(\lambda) = p_1^* \Sigma \mod d\lambda^{\dot{0}}, d\lambda^{\dot{1}} \tag{6.68}$$

という等式を満たして $d\lambda^{\dot{0}}, d\lambda^{\dot{1}}$ を含まない微分形式として定める．$\Sigma(\lambda)$ は λ に関して $\boldsymbol{C}^2 \setminus \{0\}$ 全体で定義された2次斉次正則函数なので，リウビルの定理によって λ の2次形式となる†13．それを

†13 あとで座標を用いた定式化を紹介するが，そこでは $\Sigma, \Sigma(\lambda)$ を (6.81), (6.83) のように具体的に表せるので，ここで述べていることはもう少し理解しやすくなる．

$$\Sigma(\lambda) = \Sigma^{\dot{a}\dot{b}}\lambda_{\dot{a}}\lambda_{\dot{b}} \tag{6.69}$$

と表そう．ここで $\Sigma^{\dot{a}\dot{b}}$ は $\mathcal{X}$ 上の 2 次微分形式の組で添字に関して対称性 $\Sigma^{\dot{a}\dot{b}} = \Sigma^{\dot{b}\dot{a}}$ をもつ．問題は $\Sigma^{\dot{a}\dot{b}}$ がある動枠 $e^{a\dot{a}}$ に付随する $S^{\dot{a}\dot{b}}$ と見なせるかどうかである．

記号を簡単にするため，これ以後は $\Sigma(\lambda)$ の代わりにそれを非斉次化した $\sigma(\zeta) = \lambda_{\dot{0}}^{-2}\Sigma(\lambda)$ を用いて議論を進める．

$$\sigma_0 = \Sigma^{\dot{0}\dot{0}}, \quad \sigma_1 = 2\Sigma^{\dot{0}\dot{1}}, \quad \sigma_2 = \Sigma^{\dot{1}\dot{1}}$$

とおけば $\sigma(\zeta)$ は ζ の 2 次式として

$$\sigma(\zeta) = \sigma_0 + \sigma_1\zeta + \sigma_2\zeta^2 \tag{6.70}$$

と表せる．Σ を $\pi^{-1}([\lambda])$（2 次元多様体である）の上に制限したものは複素シンプレクティック形式（特に閉微分形式）であるから $\sigma(\zeta)$ に対して

$$\sigma(\zeta) \wedge \sigma(\zeta) = 0, \quad \hat{d}\sigma(\zeta) = 0 \tag{6.71}$$

という等式が成立する[†14]．すでに登場したように，$\hat{d}$ は ζ を定数と見なして $\mathcal{X}$ の方向に外微分すること（$\pi' : \mathcal{F} \to \mathbf{CP}^1$ に関する相対外微分）を表す．これらの等式は $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ に関してそれぞれ

$$\sigma_0 \wedge \sigma_0 = 0, \quad \sigma_2 \wedge \sigma_2 = 0, \tag{6.72a}$$

$$\sigma_0 \wedge \sigma_1 = 0, \quad \sigma_1 \wedge \sigma_2 = 0, \tag{6.72b}$$

$$2\sigma_0 \wedge \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_1 = 0 \tag{6.72c}$$

ならびに

$$d\sigma_0 = d\sigma_1 = d\sigma_2 = 0 \tag{6.73}$$

という形に書き直せる．

話を簡単にするため，ここで非退化性条件

$$\sigma_0 \wedge \sigma_2 \neq 0 \tag{6.74}$$

[†14] これも (6.81), (6.83) のような定式化においては明らかなことである．

($\mathbf{PT}'$ の微小変形として得られるツイスター空間など，通常の設定では満たされる）を仮定しよう．このとき前述のような動枠 $e^{a\dot{a}}$ の存在を以下のように示すことができる．まず (6.72a) は σ_0, σ_2 が $\mathcal{X}$ 上の 1 次微分形式の外積として

$$\sigma_0 = e^0 \wedge e^1, \quad \sigma_2 = \tilde{e}^0 \wedge \tilde{e}^1$$

と表せることを意味する．ここに現れた 1 次微分形式 $e^0, e^1, \tilde{e}^0, \tilde{e}^1$ は (6.74) のもとで線形独立であるから，σ_1 は $e^0 \wedge e^1$, $\tilde{e}^0 \wedge \tilde{e}^1$, $e^a \wedge \tilde{e}^b$ $(a, b = 0, 1)$ の 6 個の 2 次微分形式の函数係数線形結合として表せるが，(6.72b) はこのうち $e^0 \wedge e^1$, $\tilde{e}^0 \wedge \tilde{e}^1$ が現れないことを意味する．したがって σ_1 は

$$\sigma_1 = Ae^0 \wedge \tilde{e}^0 + Be^0 \wedge \tilde{e}^1 + Ce^1 \wedge \tilde{e}^0 + De^1 \wedge \tilde{e}^1$$

と表せる．(6.72c) はここに係数として現れた $\mathcal{X}$ 上の函数 A, B, C, D に対する代数的関係式

$$AD - BC = 1 \tag{6.75}$$

に帰着する．動枠を

$$\begin{aligned} &e^{0\dot{0}} = e^0, \ e^{0\dot{1}} = -C\tilde{e}^0 - D\tilde{e}^1, \\ &e^{1\dot{0}} = e^1, \ e^{1\dot{1}} = A\tilde{e}^0 + B\tilde{e}^1 \end{aligned} \tag{6.76}$$

と選べば対応する $S^{\dot{a}\dot{b}}$ に関して

$$\sigma_0 = S^{\dot{0}\dot{0}}, \quad \sigma_1 = 2S^{\dot{0}\dot{1}}, \quad \sigma_2 = S^{\dot{1}\dot{1}}$$

という等式が成立することがわかる．(6.73) は $S^{\dot{a}\dot{b}}$ が閉微分形式であることを意味するので，このようにして決まる計量 $ds^2 = 2\det(e^{a\dot{a}})$ が右平坦であることも保証される．ちなみに上のような $e^0, e^1, \tilde{e}^0, \tilde{e}^1$ は $\sigma(\zeta)$ に対して一意的ではないが，丁寧に調べれば，任意性は $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ 値の函数 $h = (h^a{}_b)$ による動枠の左ゲージ変換 $e^{a\dot{a}} \to h^a{}_b e^{b\dot{a}}$ に限られることが確かめられる．

5　リーマン–ヒルベルト問題としての定式化

前節で説明した手順に従って実際に右平坦時空を求めるためにはツイスター空間を具体的に設定する必要がある．一つの方法は，ペンローズが提案したよ

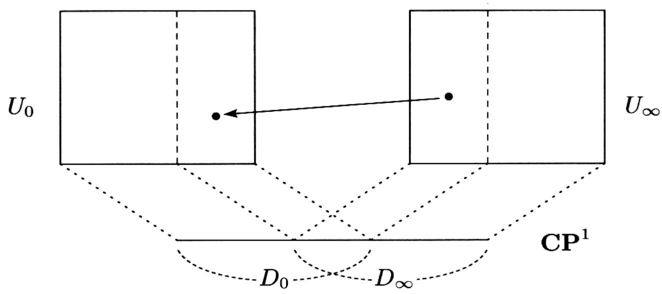


図 6.5　2 個の集合を貼り合わせてできるツイスター空間

うに，ツイスター空間を局所座標の変換函数で構成することである．これによって時空の復元・生成は一種のリーマン–ヒルベルト問題を解くことに帰着する．このリーマン–ヒルベルト問題が解ける簡単な例を最後に示す．

5.1　変換函数によるツイスター空間の構成

一般的な設定も可能ではあるが，ここではペンローズの原論文 [70] に従って

$$U_0 = \boldsymbol{C}^2 \times D_0, \quad U_\infty = \boldsymbol{C}^2 \times D_\infty \tag{6.77}$$

という 2 個の集合を貼り合わせてできるツイスター空間 $\mathcal{Z}$ を考えよう[†15]．ここで D_0, D_∞ は $\mathbf{CP}^1$ を覆う 2 個の円盤

$$D_0 = \{\zeta \in \mathbf{CP}^1 \mid |\zeta| < r_0\}, \quad D_\infty = \{\zeta \in \mathbf{CP}^1 \mid |\zeta| > r_\infty\} \tag{6.78}$$

であり，$(w^0, w^1, \zeta) \in U_0$ と $(v^0, v^1, \zeta) \in U_\infty$ は

$$v^0 = f^0(w^0, w^1, \zeta), \quad v^1 = f^1(w^0, w^1, \zeta) \tag{6.79}$$

という変換関係式が成立するとき同一視される（図 6.5）．さらに，変換函数 $f^a = f^a(w^0, w^1, \zeta)$ は

$$\frac{\partial f^0}{\partial w^0}\frac{\partial f^1}{\partial w^1} - \frac{\partial f^0}{\partial w^1}\frac{\partial f^1}{\partial w^0} = \zeta^{-2} \tag{6.80}$$

[†15] $\boldsymbol{C}^2$ を適当な開部分集合に置き換えた設定も考えられる．そのような設定は大きなツイスター空間のある特定のツイスター曲線の近傍のみを記述したものと解釈できる．その意味で，2 個の集合を貼り合わせてできるツイスター空間は時空の 1 点の近傍を記述するという目的のためには十分に一般的なものである．

という条件を満たすものとする．これによって $\mathcal{Z}$ 上で

$$\hat{d}w^0 \wedge \hat{d}w^1 = \zeta^2 \hat{d}v^0 \wedge \hat{d}v^1$$

という等式が成立する．ここでも $\hat{d}$ は ζ を定数と見なして外微分すること（今の場合は $\pi : \mathcal{Z} \to \mathbf{CP}^1$ に関する相対外微分）を表す．この等式によって定義される微分形式が本質的には Σ （正確にはそれを λ_0^2 で割ったもの）である：

$$\lambda_0^{-2}\Sigma = \hat{d}w^0 \wedge \hat{d}w^1 = \zeta^2 \hat{d}v^0 \wedge \hat{d}v^1 \tag{6.81}$$

変換函数を $f^a(w^0, w^1, \zeta) = \zeta^{-1}w^a$ と選べば $\mathcal{Z}$ は $\mathbf{PT}'$ に一致する．それ以外の場合は $\mathbf{PT}'$ の変形と見なせる．

ツイスター空間 $\mathcal{Z}$ をこのように定義するとき，ツイスター曲線は $D_0 \cap D_\infty$ 上で

$$v^0(\zeta) = f^0(w^0(\zeta), w^1(\zeta), \zeta), \quad v^1(\zeta) = f^1(w^0(\zeta), w^1(\zeta), \zeta) \tag{6.82}$$

という方程式を満たすような D_0 上の正則函数 $w^a(\zeta)$ と D_∞ 上の正則函数 $v^a(\zeta)$ の組で表現される．$\mathcal{Z}$ に対する右平坦時空を求めるにはこのような函数の組の4パラメータ族を求めなければならない．これは一種のリーマン–ヒルベルト問題であるが，第5章で出会った行列値正則函数に関するリーマン–ヒルベルト問題（それは行列値正則函数の「分解問題」として定式化できた）と違って，この問題には線形構造はない．その意味でこれは「非線形リーマン–ヒルベルト問題」と呼ぶべきものである．

この問題の解の存在は小平–スペンサー理論によって保証されているが，線形リーマン–ヒルベルト問題と違って，それを解く一般的な方法は知られていない．これがペンローズの方法によって右平坦時空を構成する際に出会う最大の困難である．ただし，特別な場合にはこの問題を解いて右平坦時空を求めることができる．あとでそのような例をいくつか紹介する．

注意 ボイヤーとプレバンスキーはこの問題を群論的な言葉に翻訳して変形理論に代わる一つの説明を与えた [12]．それはこの問題に内在する無限次元対称性などの記述には有用であるが，解の具体的な表示につながるものではない．

5.2　特別な座標系による右平坦時空の記述

ツイスター空間から右平坦時空を構成する手順を説明した際，$e^{a\dot{a}}$ の決め方はやや漠然としたものにとどめておいた．反自己双対時空の構成を前述のリーマン–ヒルベルト問題 (6.82) として定式化すれば，それから決まるある特別な時空座標系を用いて $e^{a\dot{a}}$ をより具体的に決めることができる．以下に示すように，これはプレバンスキーによる右平坦時空の記述 [77] をツイスター空間の言葉で説明するものになっている．

まず $\lambda_{\dot{0}}^{-2}\Sigma$ を w^a, v^a で表す式 (6.81) からリーマン–ヒルベルト問題の解に対して

$$\hat{d}w^0(\zeta)\wedge\hat{d}w^1(\zeta)=\zeta^2\hat{d}v^0(\zeta)\wedge\hat{d}v^1(\zeta)$$

という等式が成立することに注意する．この等式によって決まる微分形式は $\sigma(\zeta)=\lambda_{\dot{0}}^{-2}\Sigma(\zeta)$ に他ならない：

$$\sigma(\zeta)=\lambda_{\dot{0}}^{-2}\Sigma(\zeta)=\hat{d}w^0(\zeta)\wedge\hat{d}w^1(\zeta)=\zeta^2\hat{d}v^0(\zeta)\wedge\hat{d}v^1(\zeta) \tag{6.83}$$

$w^a(\zeta)$ と $v^a(\zeta)$ による二通りの表示からこの微分形式は ζ について $\boldsymbol{C}$ 上で正則で，$\zeta=\infty$ において 2 位の極をもつことがわかる．リウビルの定理によってそれは ζ の 2 次式であるから

$$\sigma(\zeta)=\sigma_0+\sigma_1\zeta+\sigma_2\zeta^2$$

と表せる．$w^a(\zeta), v^a(\zeta)$ をそれぞれ D_0, D_∞ において（特にその共通部分において）

$$w^a(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n^a\zeta^n,\quad v^a(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n^a\zeta^{-n} \tag{6.84}$$

とローラン展開すれば，(6.83) の ζ^0, ζ^2 の項を比較することによって

$$\sigma_0=dw_0^0\wedge dw_0^1,\quad \sigma_2=dv_0^0\wedge dv_0^1 \tag{6.85}$$

という等式が得られる．したがって非退化性条件 (6.74) のもとで

$$dw_0^0\wedge dw_0^1\wedge dv_0^0\wedge dv_0^1\neq 0$$

という条件が満たされて，$w_0^0, w_0^1, v_0^0, v_0^1$ を時空座標系に選べる．平坦時空の

場合

$$w^0(\zeta) = \zeta v^0(\zeta) = y - \zeta \bar{z}, \quad w^1(\zeta) = \zeta v^1(\zeta) = z + \zeta \bar{y}$$

に合わせてこれらを

$$w_0^0 = y, \quad w_0^1 = z, \quad v_0^0 = -\bar{z}, \quad v_1^1 = \bar{y} \tag{6.86}$$

と表すことにする．(6.83) の ζ^1 の項を比較することによって σ_1 に対する二通りの表示

$$\sigma_1 = dy \wedge dw_1^1 + dw_1^0 \wedge dz = dv_1^0 \wedge d\bar{y} - d\bar{z} \wedge dv_1^1$$

が得られる．これから特に

$$d(w_1^1 dy - w_1^0 dz + v_1^0 d\bar{y} + v_1^1 d\bar{z}) = 0$$

という等式が従うが，これは

$$d\Omega = w_1^1 dy - w_1^0 dz + v_1^0 d\bar{y} + v_1^1 d\bar{z} \tag{6.87}$$

というポテンシャル函数 $\Omega = \Omega(y, z, \bar{y}, \bar{z})$ の存在を保証する．これから得られる低次のローラン係数の表示

$$w_1^0 = -\Omega_z, \quad w_1^1 = \Omega_y, \quad v_1^0 = \Omega_{\bar{y}}, \quad v_1^1 = \Omega_{\bar{z}}$$

（ここで Ω に付した添字は $\Omega_y = \partial\Omega/\partial y$ などのように導函数を表す）を用いれば σ_1 が

$$\sigma_1 = \Omega_{y\bar{y}} dy \wedge d\bar{y} + \Omega_{y\bar{z}} dy \wedge d\bar{z} + \Omega_{z\bar{y}} dz \wedge d\bar{y} + \Omega_{z\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \tag{6.88}$$

という「ケーラー形式（Kähler form）」（実際には $y, z, \bar{y}, \bar{z}$ が独立変数なので，ケーラー形式の「複素化」と呼ぶべきもの）に表せることがわかる．以上のことによって (6.72a), (6.72b), (6.73) はすでに満たされている．残る (6.72c) から Ω に対する微分方程式

$$\Omega_{y\bar{y}} \Omega_{z\bar{z}} - \Omega_{y\bar{z}} \Omega_{z\bar{y}} = 1 \tag{6.89}$$

が得られる．これがプレバンスキーの第 1 天界方程式（first heavenly equation）であるが，数学ではこの方程式を複素モンジュ–アンペール方程式（complex

Monge-Ampère equation）と呼ぶのが一般的である．この場合には $e^{a\dot{a}}$ を

$$e^{0\dot{0}} = dy,\ e^{0\dot{1}} = -\Omega_{z\bar{y}}d\bar{y} - \Omega_{z\bar{z}}d\bar{z},$$
$$e^{1\dot{0}} = dz,\ e^{1\dot{1}} = \Omega_{y\bar{y}}d\bar{y} + \Omega_{y\bar{z}}d\bar{z} \tag{6.90}$$

と選べる．対応する計量は

$$ds^2 = 2\Omega_{y\bar{y}}dyd\bar{y} + 2\Omega_{y\bar{z}}dyd\bar{z} + 2\Omega_{z\bar{y}}dzd\bar{y} + 2\Omega_{z\bar{z}}dzd\bar{z} \tag{6.91}$$

という「ケーラー計量 (Kähler metric)」になる（これも正確にはケーラー計量の「複素化」である）．

$y, z, \bar{y}, \bar{z}$ のかわりに y, z と

$$p = w_1^0 = -\Omega_z, \quad q = w_1^1 = \Omega_y \tag{6.92}$$

を新たな時空座標系に選べば，プレバンスキーが与えたもう一つの時空記述に移れる．実際，(6.83) から ζ^3 の項の係数を取り出せば

$$dy \wedge dw_3^1 + dp \wedge dw_2^1 + dw_3^0 \wedge dz + dw_2^0 \wedge dq = 0$$

という等式が得られるが，これは

$$d\Theta = w_3^1 dy + w_2^1 dp - w_3^0 dz - w_2^0 dq \tag{6.93}$$

というポテンシャル函数 $\Theta = \Theta(y, z, p, q)$ の存在を保証する．少し計算をすれば，$e^{a\dot{a}}$ がこれを用いて

$$e^{0\dot{0}} = dy,\ e^{0\dot{1}} = dp + \Theta_{pq}dy + \Theta_{qq}dz,$$
$$e^{1\dot{0}} = dz,\ e^{1\dot{1}} = dq - \Theta_{pp}dy - \Theta_{pq}dz \tag{6.94}$$

と表せることがわかる．(6.83) から ζ^4 項の係数を取り出せばプレバンスキーの第 2 天界方程式（second heavenly equation）

$$\Theta_{pz} - \Theta_{qy} + \Theta_{pp}\Theta_{qq} - (\Theta_{pq})^2 = 0 \tag{6.95}$$

が得られる．対応する計量は

$$ds^2 = 2dydq - 2dzdp - 2\Theta_{pp}(dy)^2 - 4\Theta_{pq}dydz - 2\Theta_{qq}(dz)^2 \tag{6.96}$$

と表せる．

注意　ここでは複素時空で議論しているが，以上のことは形式的にはケーラー構造をもつ実時空 $\mathcal{M}$ にもそのまま当てはまる．y, z を $\mathcal{M}$ 上の正則局所座標系と解釈すれば，第1天界方程式（すなわち複素モンジュ–アンペール方程式）はケーラー計量のリッチ曲率が消えること（リッチ平坦性）を表している．これは微分幾何学で長年にわたって研究されているケーラー–アインシュタイン計量（Kähler-Einstein metric）（参考文献 [115, 119] を参照されたい）の特別な場合である．

5.3　右平坦時空の簡単な構成例

以上の一般論に従って実際に右平坦時空が構成できる簡単な例を二つ紹介する．

第1の例は複素 pp 波（complex pp wave）と呼ばれるもので，第2天界方程式の (y, p) のみに依存する解 $\Theta = \Theta(y, p)$（任意函数が解となる）に対応する．これを導くには

$$v^0 = \zeta^{-1} w^0, \quad v^1 = \zeta^{-1} w^1 + f(w^0, \zeta) \tag{6.97}$$

という変換関係式から出発する [18]．ここで $f(w^0, \zeta)$ は w^0 について $\boldsymbol{C}$ 上で正則，ζ について $D_0 \cap D_\infty$ 上で正則な任意函数とする．この場合のリーマン–ヒルベルト問題 (6.82) の解 $w^a(\zeta), v^a(\zeta)$ は以下のような手順（ゲージ場のアティヤ–ウォード仮設解を連想させる）で具体的に求められる．まず (6.82) の第1式を

$$w^0(\zeta) = \zeta v^0(\zeta)$$

と書き直せば，リウビルの定理によって両辺は ζ の1次式である．y, z, p, q という時空座標の定義に照らせばこれらは

$$w^0(\zeta) = \zeta v^0(\zeta) = y + p\zeta \tag{6.98}$$

と表せる．(6.82) の第2式はこれによって

$$v^1(\zeta) = \zeta^{-1} w^1(\zeta) + f(y + p\zeta, \zeta)$$

と書き直せる．したがって $f(y + p\zeta, \zeta)$ を $D_0 \cap D_\infty$ において

$$f(y + p\zeta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(y, p) \zeta^{-n}$$

とローラン展開すれば $w^1(\zeta), v^1(\zeta)$ はそれぞれ

$$w^1(\zeta) = z + q\zeta - \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n(y,p)\zeta^{-n+1}, \tag{6.99}$$

$$v^1(\zeta) = q + f_0(y,p) + (z + f_1(y,p))\zeta^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(y,p)\zeta^{-n} \tag{6.100}$$

と決まる．対応する Θ ポテンシャルは

$$\Theta_y = -f_{-2}(y,p), \quad \Theta_p = -f_{-1}(y,p), \quad \Theta_z = \Theta_q = 0$$

を満たすものとして定義される．$f_n(y,p)$ の周回積分表示

$$f_n(y,p) = \oint f(y+p\zeta,\zeta)\frac{\zeta^n d\zeta}{2\pi i},$$

に注意すれば，Θ を

$$\Theta = -\oint g(y+p\zeta,\zeta)\frac{\zeta^{-2}d\zeta}{2\pi i} \tag{6.101}$$

と周回積分表示することができる．ここで $g(w^0,\zeta)$ は $f(w^0,\zeta)$ の w^0 に関する原始函数である．

第 2 の例はトッドとウォードの右平坦空間の構成例 [92, 96] の一つを少し見やすくしたもので，変換関係式を

$$v^0 = \zeta^{-2}w^0, \quad v^1 = w^1 + f(w^0,\zeta) \tag{6.102}$$

に変えたもの（これもアティヤ–ウォード仮設解を思わせる）から得られる．ここでは $w^0(\zeta) = \zeta^2 v^0(\zeta)$ が ζ の 2 次式になる．この 2 次式を

$$w^0(\zeta) = \zeta^2 v^0(\zeta) = y + p\zeta + r\zeta^2 \tag{6.103}$$

と表せば，最初の例と同様に $f(y+p\zeta+r\zeta^2,\zeta)$ の周回積分を用いて $w^1(\zeta), v^1(\zeta)$ を具体的に書き下すことができる．リーマン–ヒルベルト問題はこのようにして解けるわけだが，そこから最終的に計量を引き出すにはさらに計算が必要になる．これにはいろいろな流儀があり得るが，ここでは y,p,r,z を時空座標に選んでプレバンスキーの時空記述に似た形式に結果をまとめてみよう．

この例に限らず，一般に

$$y = w_0^0, \quad p = w_1^0, \quad r = w_2^0, \quad z = w_0^1 \tag{6.104}$$

が函数的に独立であれば，それらを時空座標に選んで時空記述を行うことができる．このとき Ω, Θ の場合と同様にして

$$dF = w_1^1 dr + w_2^1 dp + w_3^1 dy - w_3^0 dz \tag{6.105}$$

というポテンシャル函数 $F = F(y, z, p, r)$ の存在がわかる．F は「第3天界方程式」と呼ぶべき方程式

$$F_{pp} - F_{ry} + F_{rr}F_{pz} - F_{rz}F_{pr} = 0 \tag{6.106}$$

に従う．これに基づいて少し計算すれば，対応する動枠が

$$\begin{aligned} e^{0\dot{0}} &= dy, \quad e^{0\dot{1}} = dy + \frac{F_{pr}}{F_{rr}}dy - \frac{1}{F_{rr}}dz, \\ e^{1\dot{0}} &= dz, \quad e^{1\dot{1}} = dF_r + \frac{(F_{pr})^2 - F_{pp}F_{rr}}{F_{rr}}dy - \frac{F_{pr}}{F_{rr}}dz \end{aligned} \tag{6.107}$$

で与えられることがわかる．$F_z = 0$ すなわち F が y, p, r のみの函数 $F = F(y, p, r)$ であれば F の満たすべき方程式は線形微分方程式

$$F_{pp} - F_{ry} = 0 \tag{6.108}$$

（本質的には3次元ラプラス方程式の複素化である）に帰着する．これがちょうど (6.102) から得られる時空に対応する．実際，(6.102) に対するリーマン–ヒルベルト問題を前述のようにして解けば，F に対して

$$F = -\oint g(y + p\zeta + r\zeta^2, \zeta)\frac{\zeta^{-3}d\zeta}{2\pi i} \tag{6.109}$$

という形の周回積分表示が得られるが，この周回積分（ペンローズ変換の3次元版と呼ぶべきもの）は明らかに (6.108) を満たしている．

注意1 上に示した「第3天界方程式」と第2天界方程式は互いに

$$r = -\Theta_q, \quad F = \Theta + qr \tag{6.110}$$

あるいは

$$q = F_r, \quad \Theta = F - qr \tag{6.111}$$

というルジャンドル変換（Legendre transformation）で結ばれている [25]．時空変数を増やすこと（ソリトン方程式で高次時間発展の階層を考えることに相当する）によって，これらの天界方程式の背後に無限個の天界方程式とそれらを結ぶルジャンド

ル変換が存在することがわかる [88].

注意 2 ギンディキンは積分幾何学の観点から右平坦時空とその一般化を考察し，ここで紹介したものとは異なるさまざまな例を構成している [28, 30, 31]（論文集 [19] 所収の解説も参照されたい）.

覚え書き

1. ペンローズの方法によって右平坦時空の構成を具体的に実行した例は数少ないが，その中でも特に興味深いのはヒッチン [35] による重力インスタントン（gravitational instanton）の研究であろう．これはギボンズとホーキング [33] によって見出されてこのように名づけられた時空をペンローズの方法に基づいて論じたものである．ヒッチンは巡回群による $\boldsymbol{C}^2$ の商空間とその変形族に基づいてツイスター空間を構成し，SU(2) の有限部分群（いわゆる「A-D-E 分類」に従う）に付随する一般化の可能性を示唆した．それらの一般化された重力インスタントンは実際にクロンハイマーによって構成されたが [53]，そこで用いられたのはツイスターの方法ではなくて，その後登場した超ケーラー商（hyper-Kähler quotient）の方法 [40] である．
2. 共形的反自己双対時空の中には，本文で説明したようなリッチ曲率やスカラー曲率の消滅条件で定義されるもの以外にも興味深い族がある．その一例は超エルミート構造（hyper-Hermitian structure）や超複素構造（hyper-complex structure）をもつ時空である [11, 39]．これはツイスター空間が $\mathbf{CP}^1$ への射影をもつ場合として特徴づけられる [21, 32]．また，スカラー平坦な複素ケーラー曲面（scalar-flat Kähler surface）すなわちスカラー曲率が消える 2 次元複素ケーラー多様体を 4 次元実多様体と見なしたものは共形的スカラー平坦時空族の一部をなす．この型の時空とそのツイスター空間についてもさまざまな研究がある [26, 54, 79, 91].
3. 超エルミート構造や超複素構造は 4 次元に限らず意味をもつ概念であり，その特別な場合として超ケーラー構造（hyper-Kähler structure）がある．右平坦時空は超ケーラー構造をもつ 4 次元多様体すなわち 4 次元超ケーラー多様体と見なすこともできる．右平坦時空のツイスター的記述は一般次元（実際には 4 の倍数になる）の超ケーラー多様体に一般化できる [40]．ちなみに，超ケーラー構造は反自己双対ヤン-ミルズ方程式の大域的解のモジュライ空間にも現れる（たとえばモノポール解のモジュライ空間の超ケーラー構造についてはア

ティヤとヒッチンの著書 [3] を参照されたい）．

4. 3 次元空間上の計量 h とねじれのない接続 ∇ に対してアインシュタイン–ワイル方程式（Einstein-Weyl equation）と呼ばれる微分方程式が知られている．その方程式に従う組 (h, ∇) をアインシュタイン–ワイル構造（Einstein-Weyl structure）という．アインシュタイン–ワイル構造に対するツイスター的記述も知られている [36]．これは 3 次元ユークリッド空間のミニツイスター理論の曲がった空間への一般化である．アインシュタイン–ワイル構造は共形的反自己双対時空の対称性による次元簡約と見なすこともできる [13, 23, 47]．特別な場合にはそこからソリトン方程式の理論で無分散極限（dispersionless limit）の方程式と呼ばれるものが現れることも知られている [23, 54, 91, 101].
5. 右平坦時空の方程式や超ケーラー構造の方程式は無限個の保存則，対称性，高次時間発展の階層構造など，ソリトン方程式と共通する性質をもつ [12, 22, 84, 88, 89]．このことは逆に，曲がった時空のツイスター理論からソリトン方程式に迫るアプローチの可能性を示唆する．これは第 5 章の覚え書きで触れたゲージ場の方程式の次元簡約とは異質の考え方として興味がある．そのようなアプローチはソリトン方程式の無分散極限に関しては文字どおりの意味で成功しているが [90]，無分散極限に移行する前のソリトン方程式については発展途上の段階にある [23, 85].
6. この章ではペンローズにならって複素時空から出発し，フロベニウスの定理を用いてツイスター空間を構成したが，アティヤらの方法 [4] に従って実時空で概複素構造の言葉を用いて議論を定式化し直すこともできる．そこではユークリッド時空 $\boldsymbol{E}$ と $\mathbf{CP}^1$ の直積 $\boldsymbol{E} \times \mathbf{CP}^1$ に新たな複素構造を入れたものをツイスター空間と見なす考え方（第 5 章を参照されたい）を一般化する．すなわち，与えられた時空 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{Z} = \mathcal{M} \times \mathbf{CP}^1$ （より一般には $\mathcal{M}$ 上の $\mathbf{CP}^1$ 束）にある概複素構造を定めれば，$\mathcal{M}$ の共形的反自己双対性のもとでこの概複素構造は積分可能になる．こうして複素多様体となった $\mathcal{Z}$ を $\mathcal{M}$ のツイスター空間と定義するのである．超ケーラー多様体に対するツイスター空間も同様にして定義される [40].
7. $\mathcal{N} = 2$ 超弦理論と呼ばれる超弦理論は通常の超弦理論（時空が 10 次元でなければならない）と違って 4 次元の $(++--)$ 符号の計量をもつ時空で意味をもつ．$\mathcal{N} = 2$ 超弦理論を曲がった時空で定式化すれば，理論の整合性から時空の右平坦性が従う [65].

参考文献

1. M.F. Atiyah, *Geometry of gauge fields*, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
2. M.F. Atiyah, V.G. Drinfeld, N.J. Hitchin and Yu.I. Manin, Construction of instantons, *Phys. Lett.* **65A** (1978), 185–187.
3. M.F. Atiyah and N.J. Hitchin, *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, Princeton University Press, Princeton, 1988.
4. M.F. Atiyah, N.J. Hitchin and I.M. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, **A362** (1978), 425–461.
5. M.F. Atiyah and R.S. Ward, Instantons and algebraic geometry, *Commun. Math. Phys.* **55** (1977), 117–124.
6. T.N. Baily and R.J. Boston, R.J. (eds.), *Twistors in mathematics and physics*, London Mathematical Society Lecture Note Series vol. 156, Cambridge University Press, 1990.
7. T.N. Bailey, L. Ehrenpreis and R.O. Wells Jr., Weak solutions of the massless field equations, *Proc. R. Soc. London* **A384** (1982), 403–425.
8. R.J. Baston and M.G. Eastwood, *The Penrose transform: its interaction with representation theory*, Oxford University Press, Oxford, 1989.
9. A.A. Belavin and V.E. Zakharov, Yang-Mills equations as inverse scattering problem, *Phys. Lett.* **73B** (1978), 53–57.
10. C.P. Boyer, *The geometry of complex self-dual Einstein spaces*, Lecture Notes in Physics vol. 189, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1983, pp. 25–45.
11. C.P. Boyer, A note on hyperhermitian four-manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988), 157–164.
12. C.P. Boyer and J.F. Plebanski, An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces, *J.*

Math. Phys. **26** (1985), 229–234.

13. D.M. Calderbank and H. Pederson, Self-dual spaces with complex structure, Einstein-Weyl geometry and geodesics, *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), 921–993.
14. L.-L. Chau, M.-L. Ge and Y.-S. Wu, Kac-Moody algebra in the self-dual Yang-Mills equation, *Phys. Rev.* **D25** (1982), 1086–1094.
15. I.V. Cherednik, Finite-band solutions to the duality equations on S^4 and two-dimensional relativistically invariant systems, *Soviet Phys. Dokl.* **24** (1979), 356–358.
16. E. Corrigan, D.B. Fairlie, R.G. Yates and P. Goddard, The construction of self-dual solutions to $SU(2)$ gauge theory, *Commun. Math. Phys.* **58** (1978), 223–240.
17. E. Corrigan and P. Goddard, Construction of instanton and monopole solutions and reciprocity, *Ann. Physics* **154** (1984), 253–279.
18. W.D. Curtis, D.E. Lerner and F.R. Miller, Complex *pp* waves and the nonlinear graviton construction, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 2024–2027.
19. H.D. Doebner and T.D. Palev (eds.), *Twistor Geometry and Non-linear Systems*, Lecture Notes in Mathematics vol. 970, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1982.
20. L. Dolan, A new symmetry group of real self-dual Yang-Mills theory, *Phys. Lett.* **113B** (1982), 387–390.
21. M. Dunajski, The twisted photon associated to hyperhermitian four manifolds, *J. Geom. Phys.* **30** (1999), 266-281.
22. M. Dunajski and L.J. Mason, Hyper-Kähler hierarchies and their twistor theory, *Commun. Math. Phys.* **213** (2000), 641–672.
23. M. Dunajski, L.J. Mason and K.P. Tod, Einstein-Weyl geometry, the dKP equation and twistor theory, *J. Geom. Phys.* **37** (2001), 63–92.
24. M.G. Eastwood, R. Penrose and R.O. Wells Jr., Cohomology and massless fields, *Commun. Math. Phys.* **78** (1981), 305–351.
25. J.D. Finley an J.F. Plebanski, The classification of all $\mathcal{H}$ spaces admitting a Killing vector, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 1938–1939.
26. E.J. Flaherty, The nonlinear graviton in interaction with a photon, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978), 961–978.
27. G.W. Gibbons and S.W. Hawking, Gravitational multi-instantons, *Phys.*

Lett. **78B** (1978), 430–432.

28. S.G. Gindikin, Bundles of differential forms and Einstein equation, *Soviet J. Nucl. Phys.* **36** (1982), 537–548.
29. S.G Gindikin, The complex universe of Roger Penrose, *Mathematical Intelligencer* vol. 5, No. 1, 27–35. Springer-Verlag, New York, 1983.
30. S.G. Gindikin, Some solutions of the self-duality Einstein equations, *Funct. Anal. Appl.* **19** (1985), 210–213.
31. S.G. Gindikin, On one construction of hyper-Kähler metrics, *Funct. Anal. Appl.* **20** (1986), 82–132.
32. J.D.E. Grant and I.A.B. Strachan, Hypercomplex integrable systems, *Nonlinearity* **12** (1999), 1247–1261.
33. P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
34. G.M. Henkin and Yu.I. Manin, Twistor description of classical Yang-Mills-Dirac fields, *Phys. Lett.* **95B** (1980), 405–408.
35. N.J. Hitchin, Polygons and gravitons, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), 465–476.
36. N.J. Hitchin, Complex manifolds and Einstein's equations, Doebner-Weber [19] 所収 (pp. 73–99).
37. N.J. Hitchin, Monopoles and geodesics, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 579–602.
38. N.J. Hitchin, On the construction of monopoles, *Commun. Math. Phys.* **89** (1983), 145–190.
39. N.J. Hitchin, Hypercomplex manifolds and the space of framing, 論文集 [41] 所収 (pp. 9–30).
40. N.J. Hitchin, A. Kahlhede, U. Lindström and M. Roček, Hyperkähler metrics and supersymmetry, *Commun. Math. Phys.* **108** (1987), 535–589.
41. S.A. Huggett, L.J. Mason, K.P. Tod, S.T. Tsou and N.M.J. Woodhouse (eds.), *The geometric univers*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
42. S.A. Huggett and K.P. Tod, *An introduction to twistor theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985 (second edition, 1994).
43. L.P. Hughston, *Twistors and particles*, Lecture Notes in Physics vol. 97, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1979.
44. L.P. Hughston and R.S. Ward (eds.), *Advances in twistor theory*, Reseach

Notes in Mathematics vol. 37, Pitman, San Francisco, London and Melbourne, 1979.

45. J. Isenberg, P.B. Yasskin and P.S. Green, Non-self-dual gauge fields, *Phys. Lett.* **78B** (1978), 462–464.

46. B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1986（邦訳：『層のコホモロジー』, 前田博信訳, シュプリンガー東京 1997 年）.

47. P.E. Jones and K.P. Tod, Minitwistor spaces and Einstein-Weyl spaces, *Class. Quant. Grav.* **2** (1985), 565–577.

48. L.H. Kauffman, *Knots and physics*, World Scientific, Singapore, 1991（邦訳：『結び目の数学と物理』, 鈴木晋一・河内明夫監訳, 培風館 1997 年）.

49. F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahlhundert*, Springer-Verlag, 1926–27（邦訳：『クライン 19 世紀の数学』, 彌永昌吉監修, 足立恒雄・浪川幸彦・石井省吾・渡辺弘訳, 共立出版 1995 年）.

50. M. Ko, E.T. Newman and K.P. Tod, The theory of $\mathcal{H}$-space, *Phys. Rep.* **71** (1981), 51–139.

51. K. Kodaira, On stability of compact submanifolds of complex manifolds, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 79–94.

52. I.M. Krichever, Rational solutions of the duality equations for Yang-Mills fields, *Funkt. Anal. Pril.* **13 (4)** (1979), 81–82.

53. P.B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. Diff. Geom.* **29** (1989), 665–683.

54. C.R. LeBrun, Explicit self-dual metrics on $\boldsymbol{CP}^2\#\cdots\#\boldsymbol{CP}^2$, *J. Diff. Geom.* **34** (1991), 233-253.

55. D.E. Lerner and P.D. Sommers (eds.), *Complex manifold techniques in theoretical physics*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 32, Pitman, Boston and London, 1979.

56. L.J. Mason and L.P. Hughston (eds.), *Further advances in twistor theory, vol. I: The Penrose transform and its application*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 231, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

57. L.J. Mason, L.P. Hughston and P.Z. Kobak (eds.), *Further advances in twistor theory, vol. II: Integrable systems, conformal geometry and gravitation*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 232, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1995.

58. L.J. Mason, L.P. Hughston, P.Z. Kobak and K. Pulverer (eds.), *Further*

advances in twistor theory, vol. III: Curved twistor spaces, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics 424, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

59. L.J. Mason and G.A.J. Sparling, Nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries are reductions of self-dual Yang-Mills, *Phys. Lett.* **137A** (1989), 29–33.
60. L.J. Mason and G.A.J. Sparling, Twistor correspondences for the soliton hierarchies, *J. Geom. Phys.* **8** (1992), 243–271.
61. L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse, Self-duality and the Painlevé transcendents, *Nonlinearity* **6** (1993), 569-581.
62. L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse, *Integrability, self-duality and twistor theory*, Oxford University Press, New York, 1996.
63. W. Nahm, The construction of all self-dual monopoles by the ADHM method, in "Monopoles in Quantum Field Theory," *Proceedings of the monopole meeting in Trieste 1981*, World Scientific, Singapore, 1982.
64. E.T. Newman, Heaven and its properties, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976), 107–111.
65. H. Ooguri and C. Vafa, Geometry of $N = 2$ strings, *Nucl. Phys.* **B361** (1991),469–518.
66. R. Penrose, Twistor algebra, *J. Math. Phys.* **8** (1967), 345–366.
67. R. Penrose, Twistor quantization and curved space-time, *Int. J. Theor. Phys.* **1** (1968), 61–99.
68. R. Penrose, Solutions of the zero-rest-mass equations, *J. Math. Phys.* **10** (1969), 38–39.
69. R. Penrose, Twistor functions and sheaf cohomology, *Twistor Newsletters* **2** (1976), 3–12. Hughston-Ward [44] に再録.
70. R. Penrose, Nonlinear gravitons and curved twistor theory, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976), 31–52.
71. R. Penrose, Massless fields and sheaf cohomology, *Twistor Newsletters* **5** (1977), 9–13. Hughston-Ward [44] に再録.
72. R. Penrose, Twistor programme, *Rep. Math. Phys.* **12** (1977), 65–76.
73. R. Penrose, *The road to reality*, Jonathan Cape, London, 2004.
74. R. Penrose and M.A.H. MacCallum, Twistor theory: an approach to the quantization of fields and space-time, *Phys. Rep.* **6C** (1972), 241–316.

75. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol. 1: Two-spinor calculus and relativistic fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

76. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and spacetime, vol. 2: Spinor and twistor methods in space-time geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

77. J.F. Plebanski, Some solutions of complex Einstein equations, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 2395–2402.

78. K. Pohlmeyer, On the Lagrangian theory of anti-self-dual fields in four-dimensional Euclidean space, *Commun. Math. Phys.* **72** (1980), 37–47.

79. M. Pontecorvo, On twistor spaces of anti-self-dual Hermitian surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), 653–661.

80. H. Sekiguchi, The Penrose transform for certain non-compact homogeneous manifolds of $U(n,n)$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **3** (1996), 655–697.

81. H. Sekiguchi, The Penrose transform for $\mathrm{Sp}(n,\boldsymbol{R})$ and singular unitary representations, *J. Math. Soc. Japan* **54** (2002), 215–253.

82. L. Smolin, The physics of spin networks, 論文集 [41] 所収（pp. 291–304）.

83. G.A. Sparling and K.P. Tod, An example of an $\mathcal{H}$-space, *J. Math. Phys.* **22** (1981), 331–332.

84. I.A.B. Strachan, The symmetry structure of the anti-self-dual Einstein hierarchy, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 3566–3573.

85. I.A.B. Strachan, The Moyal bracket and the dispersionless limit of the KP hierarchy, *J. Phys.* **A28** (1995), 1967–1976.

86. J. Tafel, A comparison of solution generating techniques for the self-dual Yang-Mills equations, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 706–710.

87. K. Takasaki, A new approach to the self-dual Yang-Mills equations, *Commun. Math. Phys.* **94** (1984), 35–59.

88. K. Takasaki, An infinite number of hidden variables in hyper-Kähler metrics, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 1515–1521.

89. K. Takasaki, Symmetries of hyper-Kähler (or Poisson gauge field) hierarchy, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 1877-1888.

90. K. Takasaki, and T. Takebe, Integrable hierarchies and dispersionless limit, *Reviews in Math. Phys.* **7** (1995), 743–808.

91. K.P. Tod, Scalar-flat Kähler metrics from Painlevé-III, *Class. Quant.*

Grav. **12** (1995), 1535–1547.

92. K.P. Tod and R.S. Ward, Self-dual metrics with self-dual Killing vectors, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, **363** (1979), 411–427.
93. K. Ueno and Y. and Nakamura, Transformation theory for anti-self-dual equations and the Riemann-Hilbert problem, *Phys. Lett.* **109B** (1982), 273–278.
94. R.S. Ward, Twisted photon, *Twistor Newsletters* **1** (1976), 2–4. Hughston-Ward [44] に再録.
95. R.S. Ward, On self-dual gauge fields, *Phys. Lett.* **61A** (1977), 81–82.
96. R.S. Ward, A class of self-dual solutions of Einstein's equations, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, **363** (1978), 289–295.
97. R.S. Ward, Self-dual space-times with cosmological constant, *Commun. Math. Phys.* **78** (1980), 1–17.
98. R.S. Ward, Ansätze for self-dual Yang-Mills fields, *Commun. Math. Phys.* **80** (1981), 563–574.
99. R.S. Ward, Completely solvable gauge-field equations in dimension greater than four, *Nucl. Phys.* **B236** (1984), 381–396.
100. R.S. Ward, Integrable and solvable systems and relations among them, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, **315** (1985), 451–457.
101. R.S. Ward, Einstein-Weyl spaces and SU(∞) Toda fields, *Class. Quant. Grav.* **7** (1990), L95–L98.
102. R.S. Ward and R.O. Wells Jr., *Twistor geometry and field theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
103. R.O. Wells Jr., Complex manifolds and mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.* (new series) **1** (1979), 296–336.
104. R.O. Wells Jr., Hyperfunction solutions of the zero-rest-mass equations, *Commun. Math. Phys.* **78** (1981), 567–600.
105. E. Witten, An interpretation of classical Yang-Mills theory, *Phys. Lett.* **77B** (1978), 394–398.
106. E. Witten, Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space, *Commun. Math. Phys.* **252** (2004), 189–258.
107. N.M.J. Woodhouse, Twistor cohomology without sheaves, *Twistor Newsletter* **2** (1976). Hughston-Ward [44] に再録.
108. Y.-S. Wu, The group theoretical aspects of infinitesimal Riemann-Hilbert

transform and hidden symmetry, *Commun. Math. Phys.* **90** (1983), 461–472.

109. C.N. Yang, Condition of self-duality for $SU(2)$ gauge fields on Euclidean four-dimensional space, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977), 1377–1379.
110. 内山龍雄,『相対性理論』, 岩波全書 292, 岩波書店 1977 年.
111. 内山龍雄,『一般相対性理論』, 裳華房 1978 年.
112. 金子晃,『超函数論入門（新版)』, 東京大学出版会 1996 年.
113. 九後汰一郎,『ゲージ場の量子論 I』, 培風館 1989 年.
114. 小玉英雄,『スピンネットワーク理論』, 数理科学 No. 457, 43–50, サイエンス社 2001 年 7 月.
115. 小林昭七,『複素解析 1, 2』, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店 1997 年.
116. 小林昭七,『接続の微分幾何とゲージ理論』, 裳華房 1989 年.
117. 高崎金久,『可積分系の世界 — 戸田格子とその仲間』, 共立出版 2001 年.
118. 朝永振一郎,『スピンはめぐる』, 自然選書, 中央公論社 1974 年.
119. 二木昭人,『微分幾何学講義』, 数理科学 SGC ライブラリ 23, サイエンス社 2003 年.
120. 松島与三,『多様体入門』, 裳華房 1965 年.
121. 茂木勇・伊藤光弘,『微分幾何学とゲージ理論』, 共立出版 2001 年（復刊）.

索　引

英数字

ア

カ

タ

ナ

ハ

マ

ヤ

ラ

ワ

〈著者紹介〉

高崎　金久（たかさき　かねひさ）

生年：1956 年石川県生まれ
学歴：東京大学大学院理学系研究科博士課程修了
学位：理学博士
現在の所属：京都大学大学院人間・環境学研究科教授
専攻：代数解析学・数理物理学，特に可積分系の理論と応用
著書：『コマの幾何学』（訳），共立出版，2000.
　　『可積分の世界—戸田格子とその仲間』，共立出版，2001.
インターネットホームページ：
http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki

ツイスターの世界
—時空・ツイスター空間・可積分系

2005 年 5 月 30 日　初版 1 刷発行
2005 年 7 月 15 日　初版 2 刷発行

著　者　高崎金久　© 2005
発行者　南條光章
発　行　共立出版株式会社
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号
電話 東京 (03) 3947-2511 番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035 番
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/
印　刷　啓文堂
製　本　関山製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 413,421.5

ISBN 4-320-01784-6

Printed in Japan